

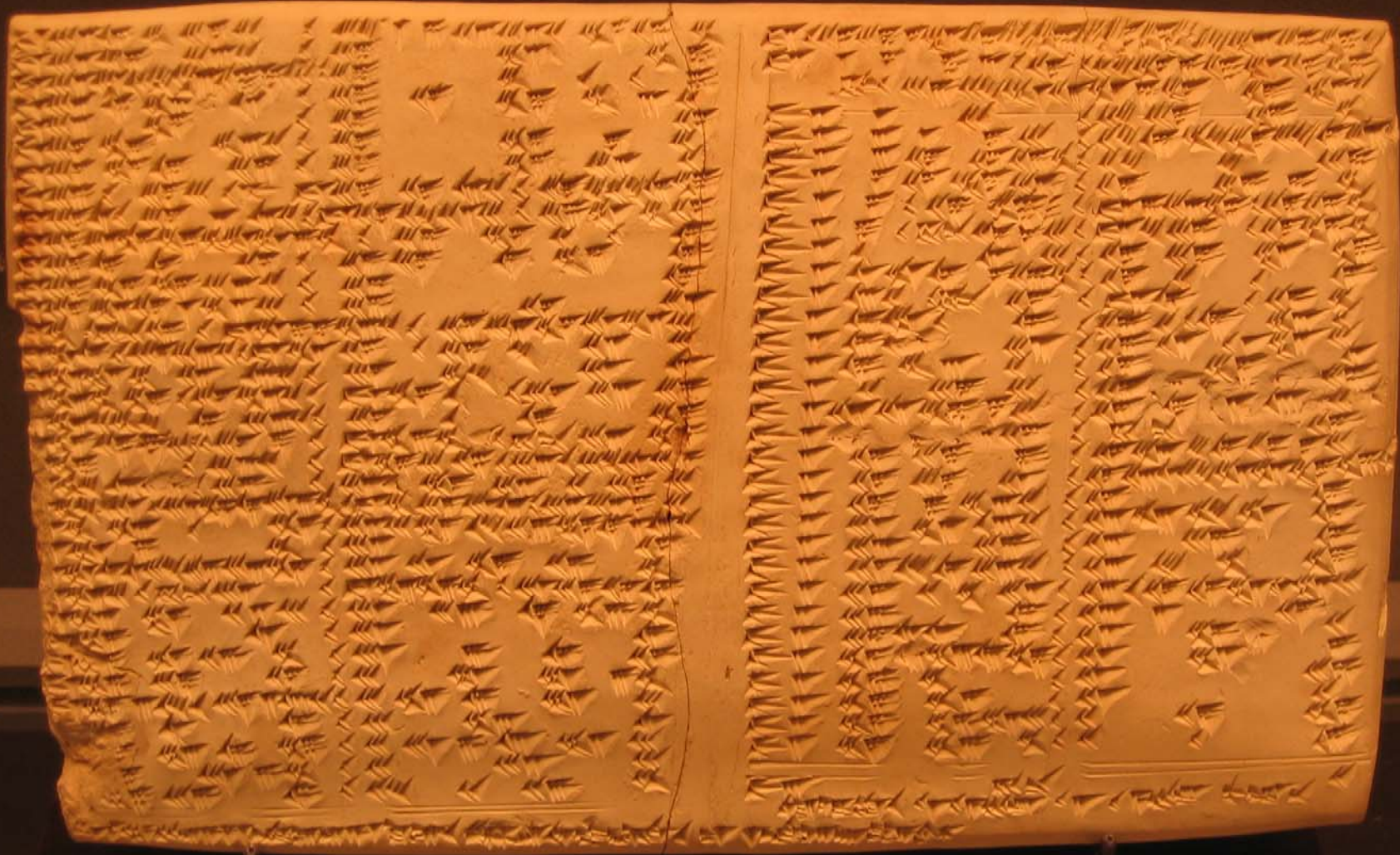
Brojevni sustav i recipročni
brojevi kod Babilonaca u doba
Seleukidnog carstva
Primjer **AO6456**

Prof. Petrinović

FER/ZESOI

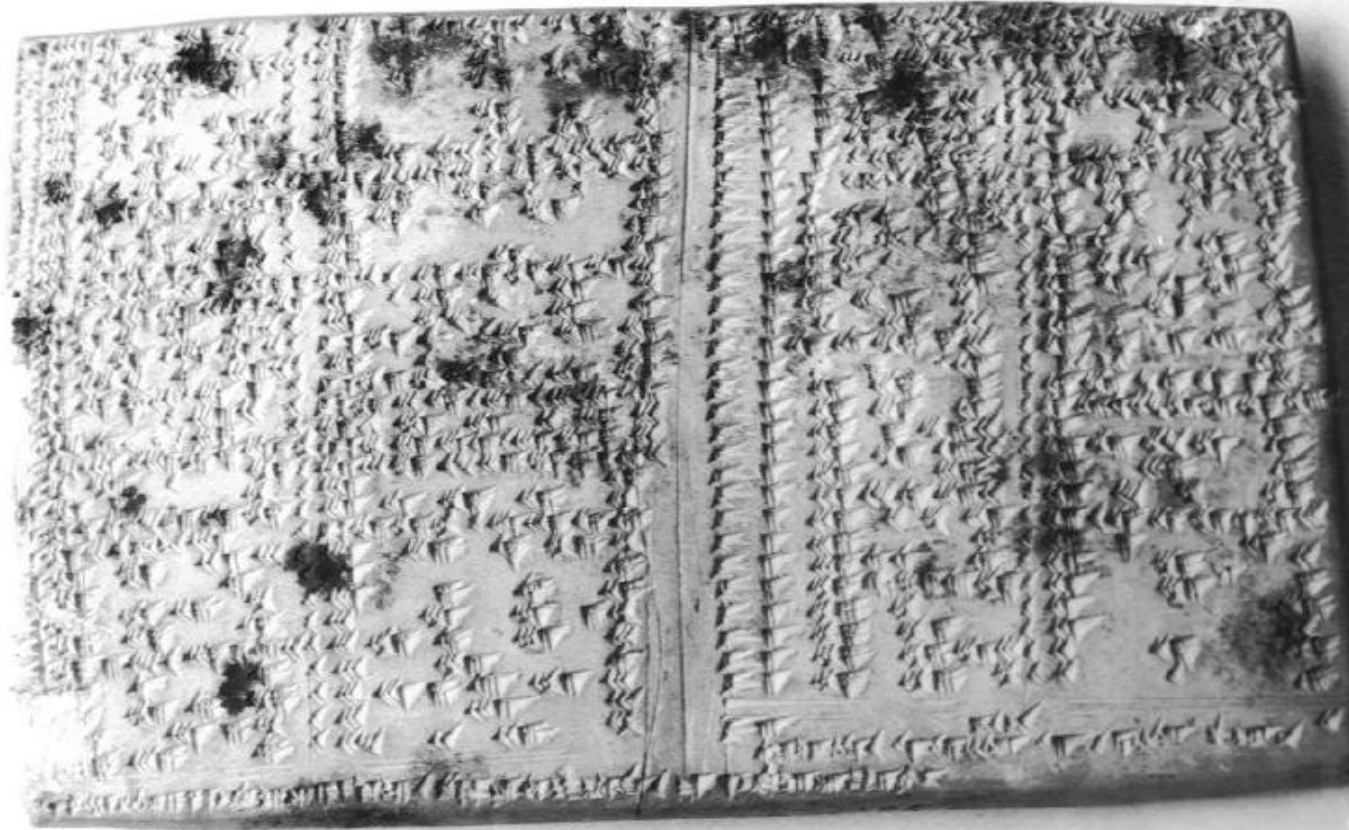
09.02.2007

Tablica AO 6456 - kopija



AO 6456 (Uruk, Musée du Louvre)

Grande table d'inverses d'époque séleucide



Gdje je izložena ? Département des Antiquités orientales, Louvre





AO 6456 - Louvre

- Scribes et savants

Table de division et de conversion des fractions

Époque séleucide (fin du 1er millénaire avant J.-C.), copie d'un original plus ancien

Warka, ancienne Uruk, Basse Mésopotamie (Iraq)

Terre cuite

Table de valeurs réciproques. Division de l'unité par une série de nombres compris entre 1 et 3. Les babyloniens conservèrent le système sexagésimal sumérien pour les textes scientifiques. Il nous est resté de ce mode de calcul la division du cercle en 360° , la mesure des angles en degrés et celle du temps en heures de 60 minutes. Pour les opérations comptables de la vie courante, on utilisait le système décimal. À l'époque séleucide, on introduisit le 0 [zéro], une innovation s'inspirant d'un procédé babylonien isolé.

- **Acquisition 1918**
- **Département des Antiquités orientales AO 6456**

Vremensko razdoblje

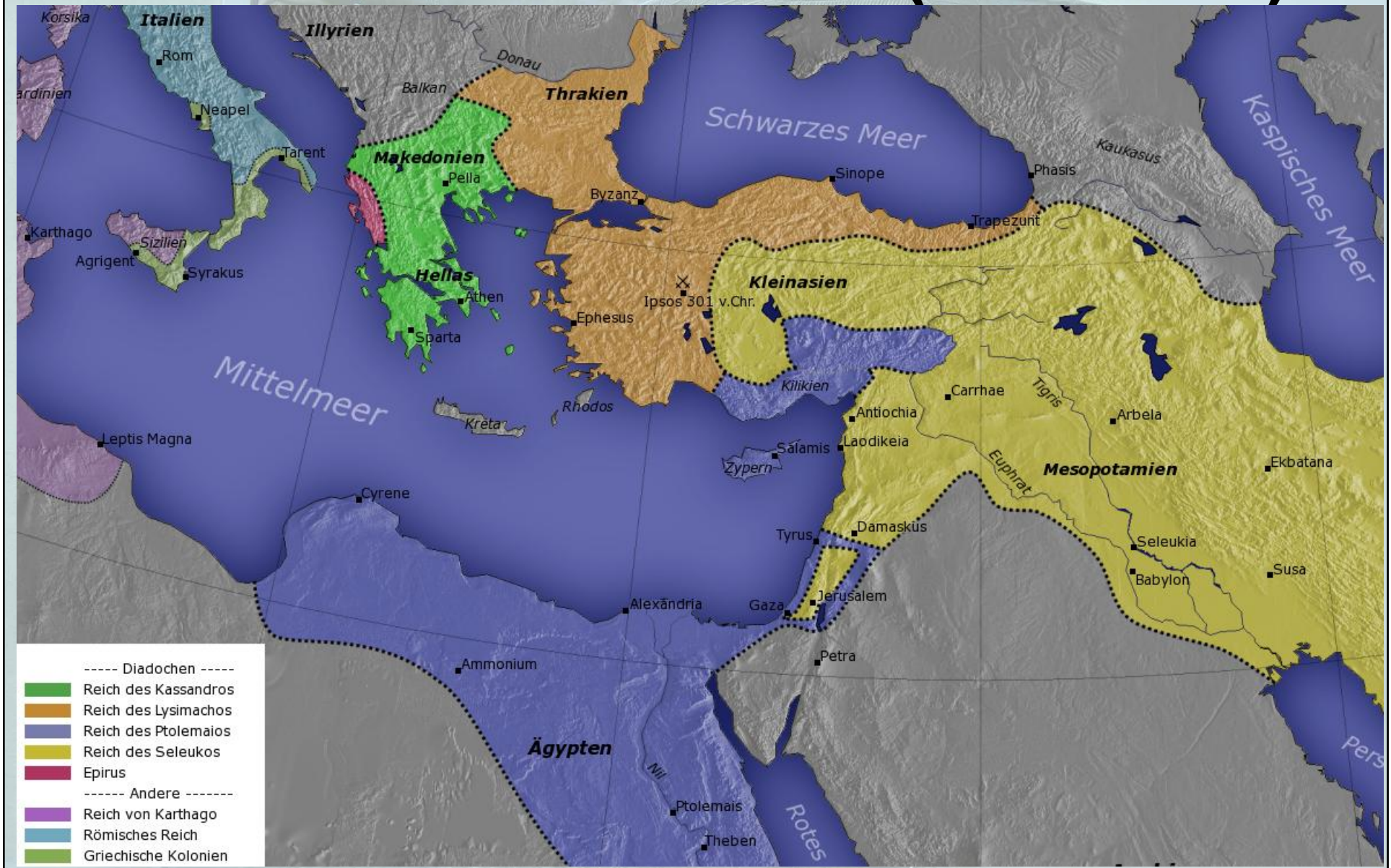


- 331. godine p.n.e. perzijski kralj Darije III poražen je od Aleksandra Velikog
- Nakon Aleksandrove smrti 323. p.n.e njegovo carstvo je podijeljeno među njegovim generalima
- Među njima, najozbiljniji “igrač” je Seleukus I koji se 304. godine proglašava kraljem
- Njega će naslijediti niz od 25 kraljeva, sve do Antioha XII i Tigranesa II

Osinjač Seleukidnog carstva Seleucus I



Seleukidno carstvo (305BC -)



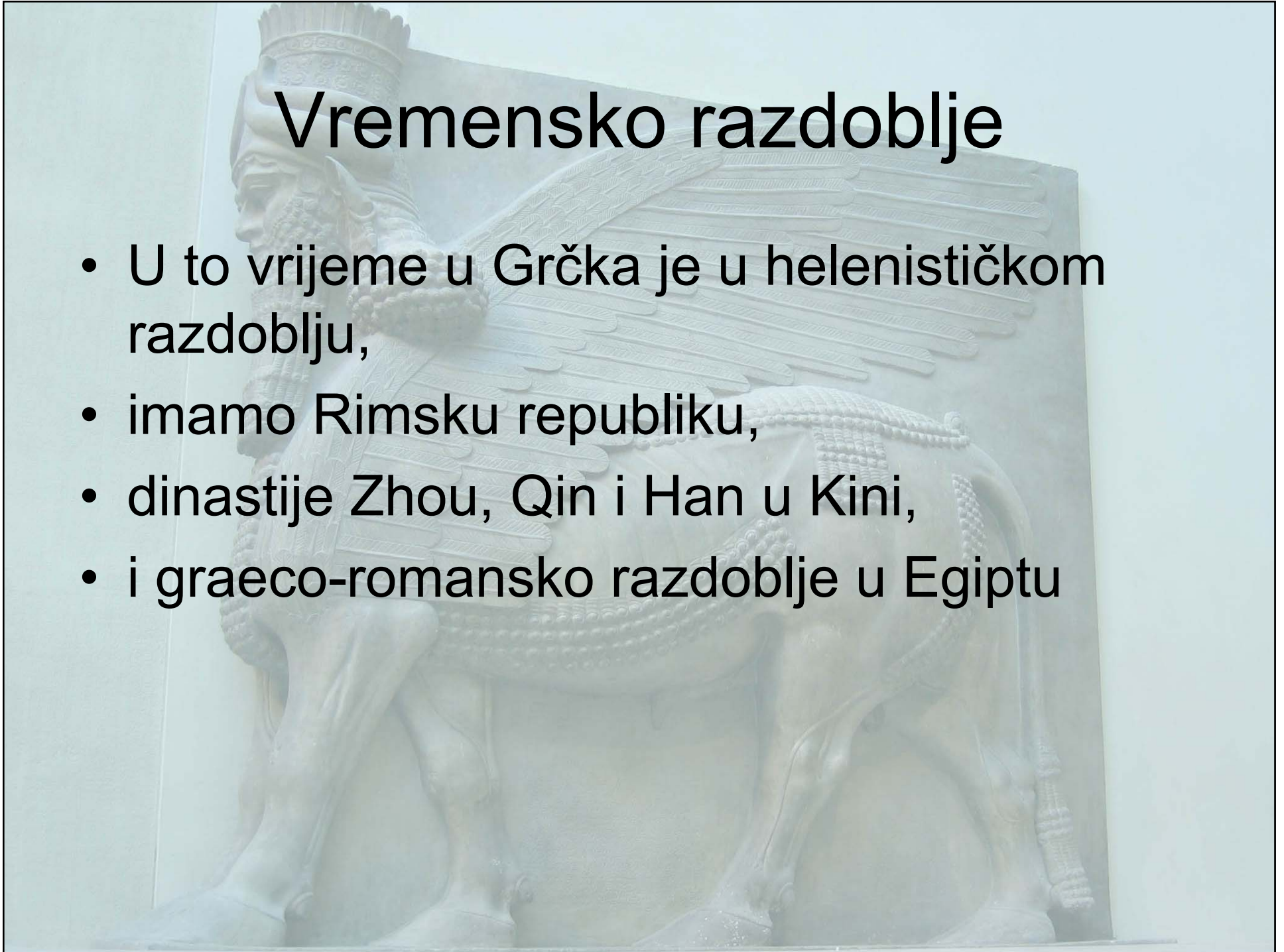
Vremensko razdoblje



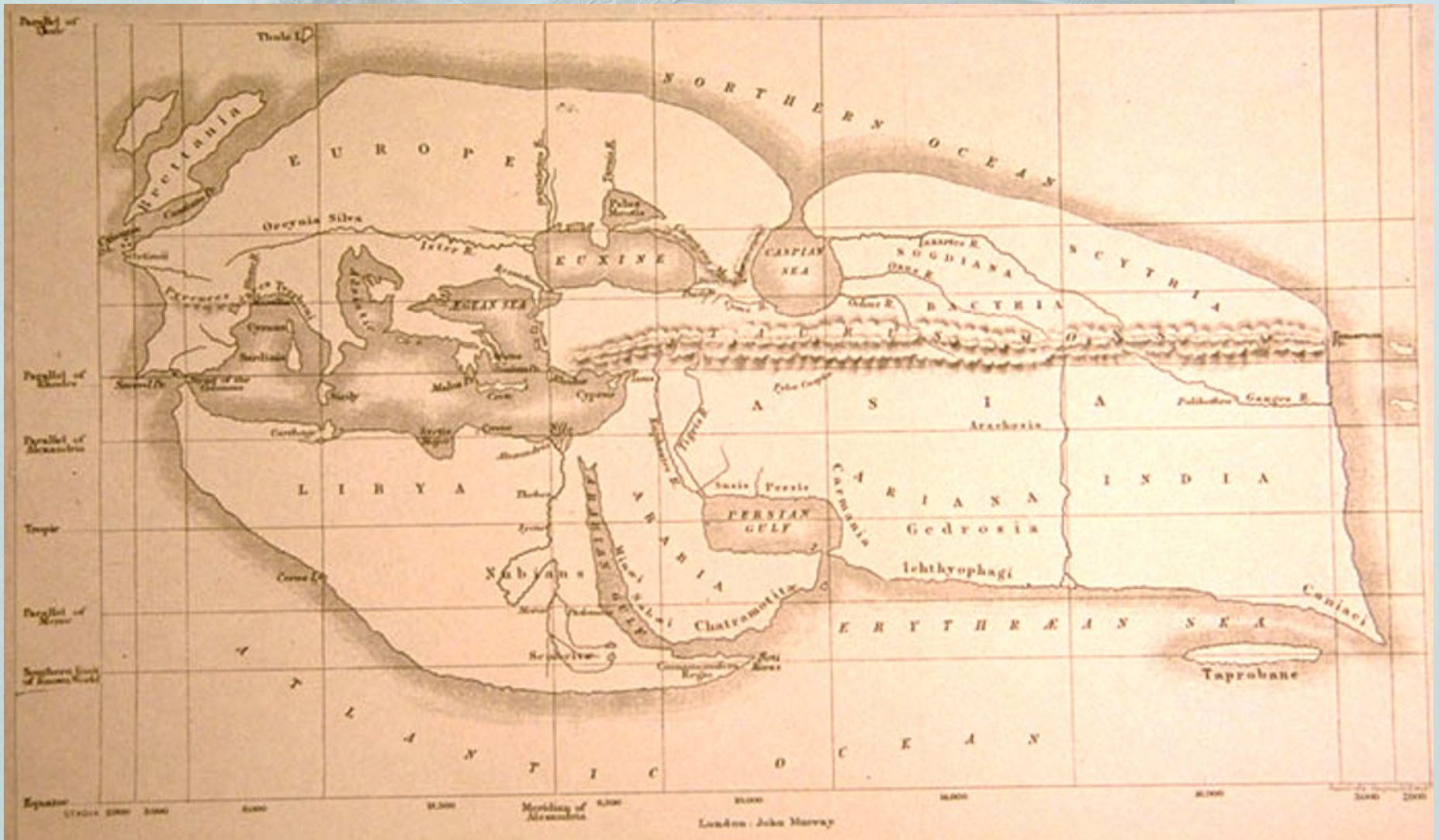
- Razvoj babilonske matematike odvijao se u naletima
- Vrlo značajan period je 18. st. p.n.e u doba kralja Hamurabija
- Također, značajno je razdoblje u 6. st. p.n.e. za vrijeme Kira Velikog
- Dakle, vrijeme Seleukidnog carstva predstavlja vrlo moderno doba babilonske matematike, u kojem su aktivni već i brojni grčki i rimski matematičari

Vremensko razdoblje

- U to vrijeme u Grčka je u helenističkom razdoblju,
- imamo Rimsku republiku,
- dinastije Zhou, Qin i Han u Kini,
- i graeco-romansko razdoblje u Egiptu



Karta svijeta prema Eratostenu (276-194 BC)



Mjesto nalaska tablice AO 6456

Uruk

Coordinates: 31°19′20″N, 45°38′10″E

From Wikipedia, the free encyclopedia

Uruk (**Sumerian**: URU UNUG 𒌦𒍪 𒀭𒀭, **Biblical**: *Erech*, **Greek**: Ορχόνη or Ορύγεια, **Arabic** وركاء *Warkā'*), was an ancient city of **Sumer** and later **Babylonia**, situated east of the present bed of the **Euphrates**, on the line of the ancient *Nil* canal, in a region of marshes, some 30 km east of **As-Samawah**, **Al-Muthannā**, **Iraq**. The theory that the modern name of **Iraq** could be possibly derived from the name Uruk is not proven. At its height, Uruk probably had 50,000-80,000 residents living in 6 square kilometres of walled area, the largest city in the world at its time. Uruk represents one of the world's first cities, with a dense population. Uruk also saw the rise of the state in Mesopotamia with a full-time bureaucracy, military, and stratified society.

Petoknjižje - Knjiga Postanka, 10. poglavlje

- **1.**Ovo je povijest Noinih sinova: Šema, Hama i Jafeta, kojima su se rodili sinovi poslije Potopa.
- **2.**Sinovi su Jafetovi: Gomer, Magog, Madaj, Javan, Tubal, Mešak, Tiras.
- **3.**A sinovi su Gomerovi: Aškenaz, Rifat i Togarma.
- **4.**Javanovi su opet sinovi: Eliša, Taršiš, Kitijci i Dodanci.
- **5.**Od njih su se razgranali narodi po otocima. To su Jafetovi sinovi prema svojim zemljama - svaki s vlastitim jezikom - prema svojim plemenima i narodima.
- **6.**Sinovi su Hamovi: Kuš i Misrajim, Put i Kanaan.
- **7.**Kuševi su: Seba, Havila, Sabta, Rama i Sabteka. Ramini su: Šeba i Dedan.
- **8.**Od Kuša se rodio Nimrod, koji je postao prvi velmoža na zemlji.
- **9.**Voljom Jahve bio je silan lovac. Zato se veli: "Kao Nimrod, silan lovac voljom Jahve."
- **10.**Glavno uporište njegova kraljevstva bili su: Babilon, **Erek**, Akad i Kalne, svi u zemlji Sinear.
-

Iz enciklopedije ARDA

An interactive guide to the works of
J.R.R. Tolkien

- Erech
- The [hill](#) at the head of the [Blackroot Vale](#).
- An ancient site at the feet of the [White Mountains](#) in [Gondor](#), though it seems to have predated the foundation of that land. Erech was most famous for a huge [Stone](#), said to have fallen from heaven (though in fact brought to [Middle-earth](#) by [Isildur](#)).

Stanovnici Uruka

Uruk-hai, prema Tolkeinu



Karta regije

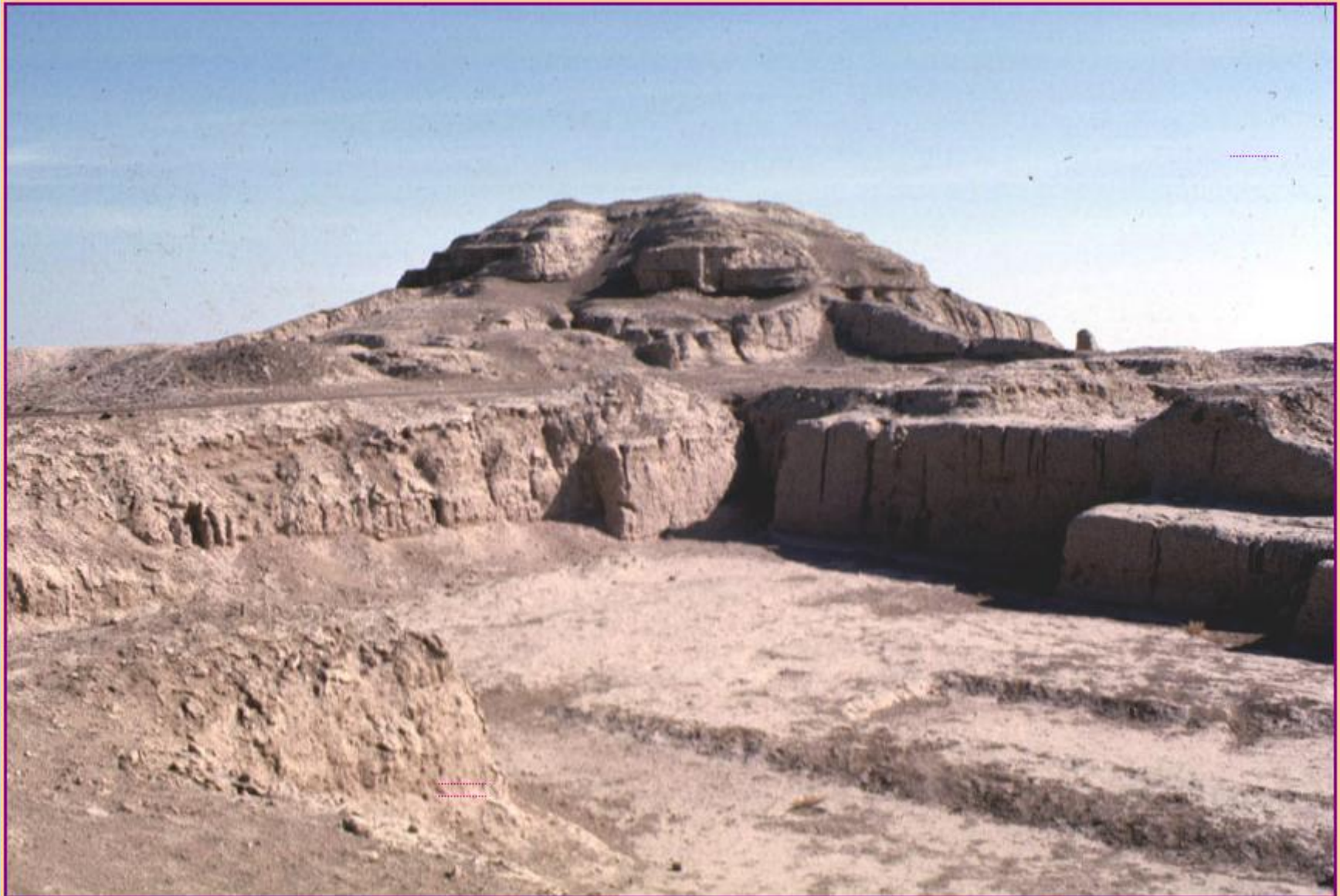


Karta stvarnog grada Uruka



A contour plan of the walled city of Uruk (Warka), one of the most important centres of Sumerian civilization

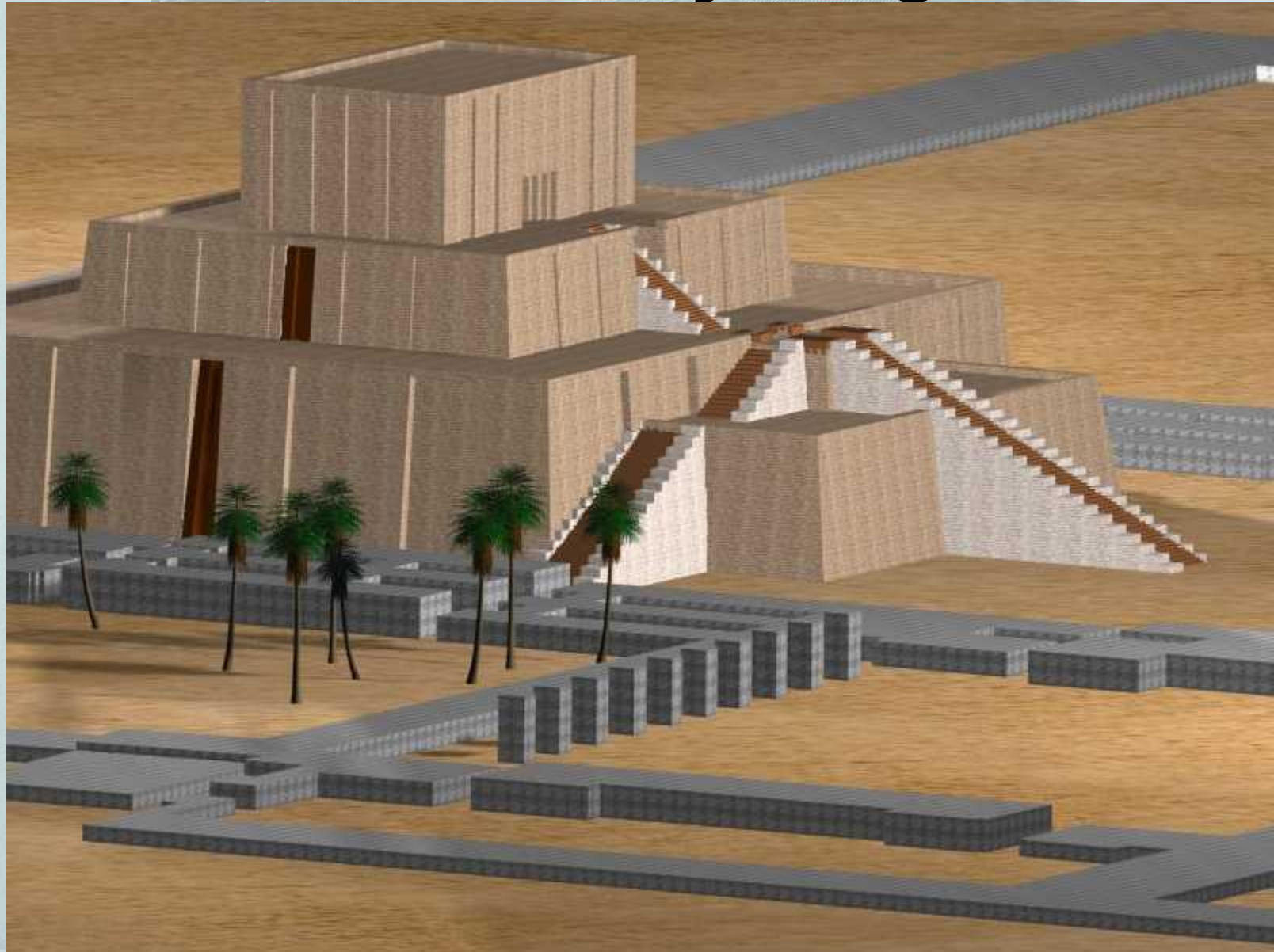
Ruševine Zigurata u Uruku



Palača u Uruku

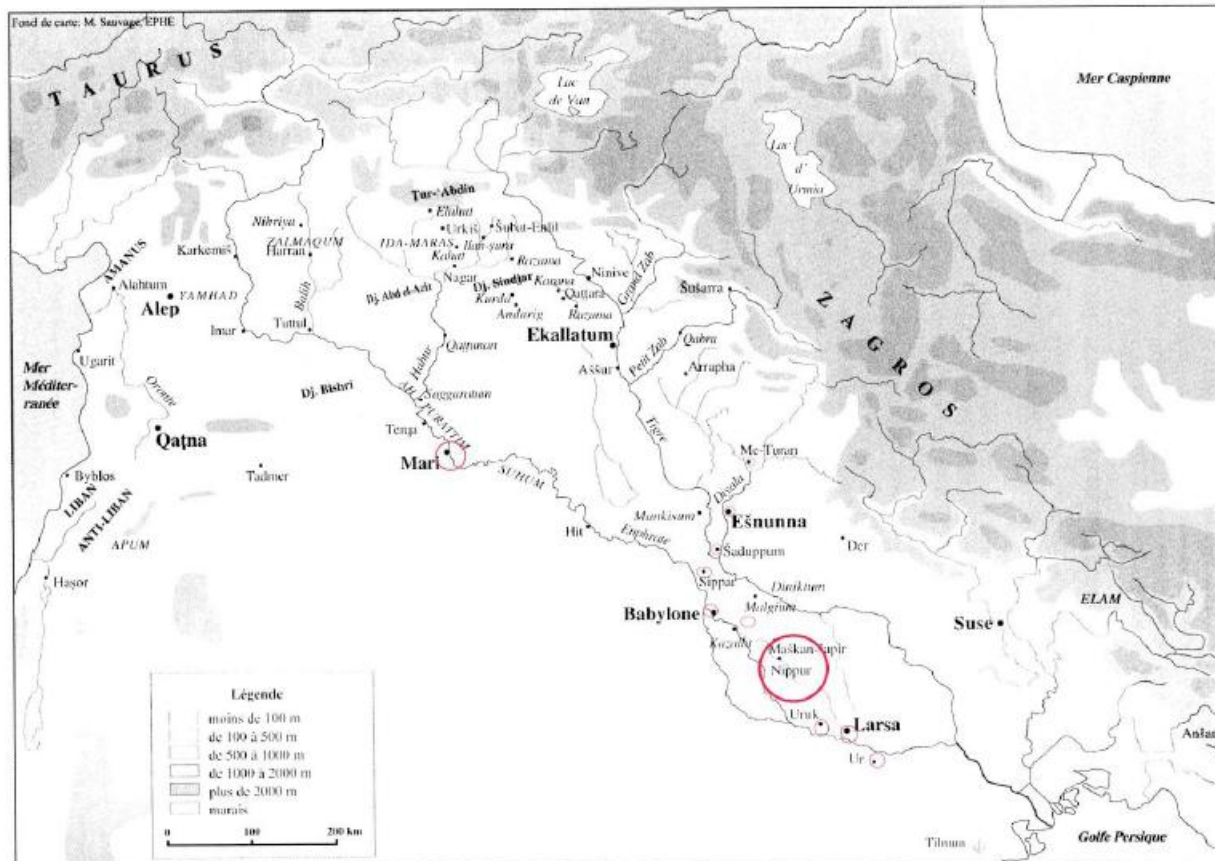


Rekonstrukcija Zigurata



Glavne pisarske škole

Ecoles de scribes en Mésopotamie (vers -1800)



Tablettes scolaires mathématiques

• Uruk	16
• Sippar	21
• Kish	65
• Ur	72
• Mari	116
• Nippur	998

Prve analiza tablice AO6456

- Thureau-Dangin, F., 1922. *Tablettes d'Uruk à l'usage des prêtres du temple d'Anu au temps des Séleucides* (Textes cuneiformes du Louvre, 6), Paris; Geuthner.
- Cazalas G., Le calcul de la Table Mathématique AO 6456, *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* 29 (1932), 183–187.
- Colonel Allotte de la Fuye, La Table Mathématique AO 6456, *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* 29 (1932), 12–19.

Ručna transkripcija – A06456

The image displays a handwritten transcription of a document, organized into two vertical columns. The text is written in a dense, cursive style, likely representing a specific script or a highly stylized shorthand. The characters are small and closely packed, making the content difficult to decipher. The paper appears aged, with some staining and irregular edges. The overall appearance is that of a historical or archival record.

Ručna transkripcija – stražnja str.

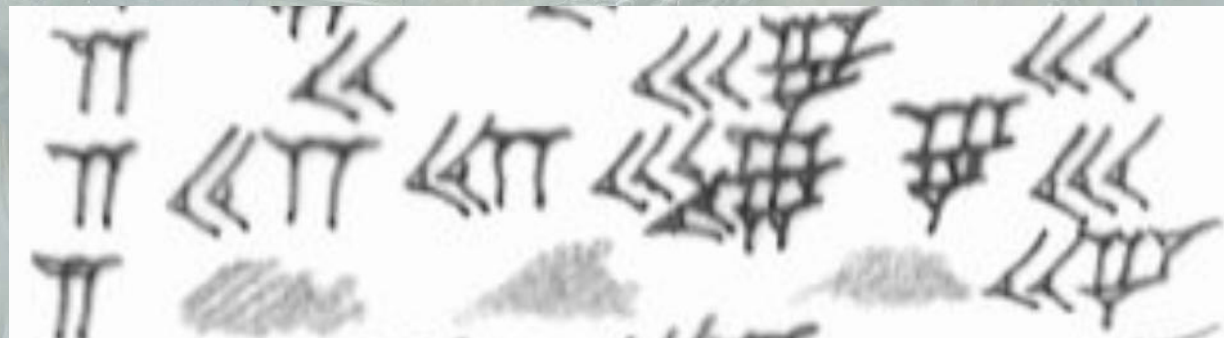
A0 64 56 Revers

The image shows a handwritten transcription of a cuneiform tablet, labeled 'A0 64 56 Revers'. The transcription is organized into two main columns. The left column contains approximately 36 lines of text, with line numbers 1 through 36 written vertically on the left margin. The right column contains approximately 33 lines of text, with line numbers 1 through 33 written vertically on the right margin. A red rectangular box highlights a section of the right column, specifically lines 17 through 19. The transcription uses various symbols and characters, including cuneiform-like shapes and vertical bars, to represent the original text. At the bottom of the page, there is a line of text that appears to be a summary or a reference line, possibly indicating the total number of lines or a specific section.

Izvadak tablice – stražnja strana red 16-18, treći stupac



Izvadak odgovarajuće ručne transkripcije



Brojevni sustav Babilonaca

- Pozicioni brojevni sustav baze 60, tzv. **seksagezimalni** sustav
- Znamenke 1-59
- Međutim,
 - nemaju nulu, ... javlja se tek u ovoj modernoj fazi
 - nije definirana apsolutna skala, tj. ne postoji oznaka decimalne točke, već pišu isključivo frakcije baze 60^N sa proizvoljnom potencijom baze
- **FLOATING POINT GURUS** 😊

Brojevni sustav Babilonaca

- Dakle broj **20 59 13** predstavlja:

$$20 * 60^{(N+2)} + 59 * 60^{(N+1)} + 13 * 60^{(N+0)}$$

Ako odaberemo $N=0$ dobivamo cijeli broj:
75553

Ako odaberemo $N= -3$ dobivamo frakciju:
0.34978240740741

Način zapisa znamenki

- Koriste klinasto pismo
(engl. Cuneiform script)
- Sve znamenke 1-59 zapisane su kombinacijom dva osnovna simbola:
 - za jedan i za deset: Y i $<$,
 - jednostavnim ponavljanjem
- Prvo se pišu desetice, a onda jedinice
- Ponovljeni simboli se spajaju u jednu formu (radi razdvajanja znamenki)

Primjer pisanja znamenki

Znamenke



Jedinice



Desetice



- Primjer dvoznamenkastog broja **2 15**



- Interpretira se kao $2 \cdot 60 + 15 = 135$,

- ali i kao $2 + 15/60 = 2.25$

- ili $2/60 + 15/3600 = 0.0375$

Primjer pisanja znamenki

┆	1	┆┆	2	┆┆┆	3	┆┆┆	4
┆┆	5	┆┆┆	6	┆┆┆┆	7	┆┆┆┆	8
┆┆┆	9	<	10	<┆	11	<┆┆	12
<┆┆┆	13	<┆┆┆	14	<┆┆┆	15	<┆┆┆┆	16
<┆┆┆┆	17	<┆┆┆┆	18	<┆┆┆┆┆	19	«	20
««	30	«	40	«	50	┆	60

- Imali su i simbole za često korištene razlomke

┆┆ 1/2

┆┆┆ 1/3

┆┆┆┆ 2/3

┆┆┆┆┆ 5/6

Nazivi znamenaka

Number	Sumerian	Akkadian
1	diš, aš	išten
2	min	šina
3	eš	šalaš
4	limmu	erbe
5	ia	hamiš
6	aš	šediš
7	imin	sebe
8	ussu	samane
9	ilimmu	tiše
10	u	ešer

11	u-diš (?)	ištenšeret
13		šalaššer
17		sebešer
20	niš	ešra
30	ušu	šalaša
40	nimin	erba
50	ninmu	hamša
60	giš, geš	šuši
100		me'at
600	gešu	nerum
1000	lim	limum
3600	šar	šarum

Interpretacija primjera sa AO6456



2 **20** **37** **30** =

$$((30/60+37)/60+20)/60+2=2.34375$$

2 **22** **22** **58** **7** **30** =

$$((((30/60+7)/60+58)/60+22)/60+22)/60+2=2.373046875$$

2 **24** =

$$24/60+2=2.4$$

Nađimo recipročnu vrijednost ovih brojeva

Uzmimo prvi broj iz primjera **2 20 37 30**

Koliko je recipročna vrijednost od **2.34375**?

.... mi znamo da iznosi ... 0.4266666666666666^{*}

a u seksagezimalnom sustavu ona iznosi:

25 36, jer je:

$$(36/60+25)/60 = 0.4266666666666666[*]$$

Pa stari Babilonci pišu da je umnožak brojeva:

2 20 37 30 i **25 36** jednak jedinici, tj. jedan su drugom recipročni.

Nađimo recipročnu vrijednost ovih brojeva

Pogledajmo slijedeći broj iz tablice:

$$2\ 22\ 22\ 58\ 7\ 30 = 2.373046875$$

... recipr. vrijednost iznosi ... 0.42139917695473

a u seksagezimalnom sustavu ona iznosi:

25 17 2 13 20, jer je:

$$\left(\left(\left(\left(\frac{20}{60}+13\right)/60+2\right)/60+17\right)/60+25\right)/60 = 0.42139917695473$$

Dakle opet pišemo da je umnožak brojeva:

2 22 22 58 7 30 i **25 17 2 13 20** jednak jedinici, a uočimo kako oba imaju **konačan prikaz**

Nađimo recipročnu vrijednost ovih brojeva

Pogledajmo konačno i zadnji primjer:

$$2 \cdot 24 = 2.4$$

... recipr. vrijednost iznosi ... 0.4166666666666666^*
odnosno u seksagezimalnom sustavu:

25, jer je:

$$25/60 = 0.4166666666666666^*$$

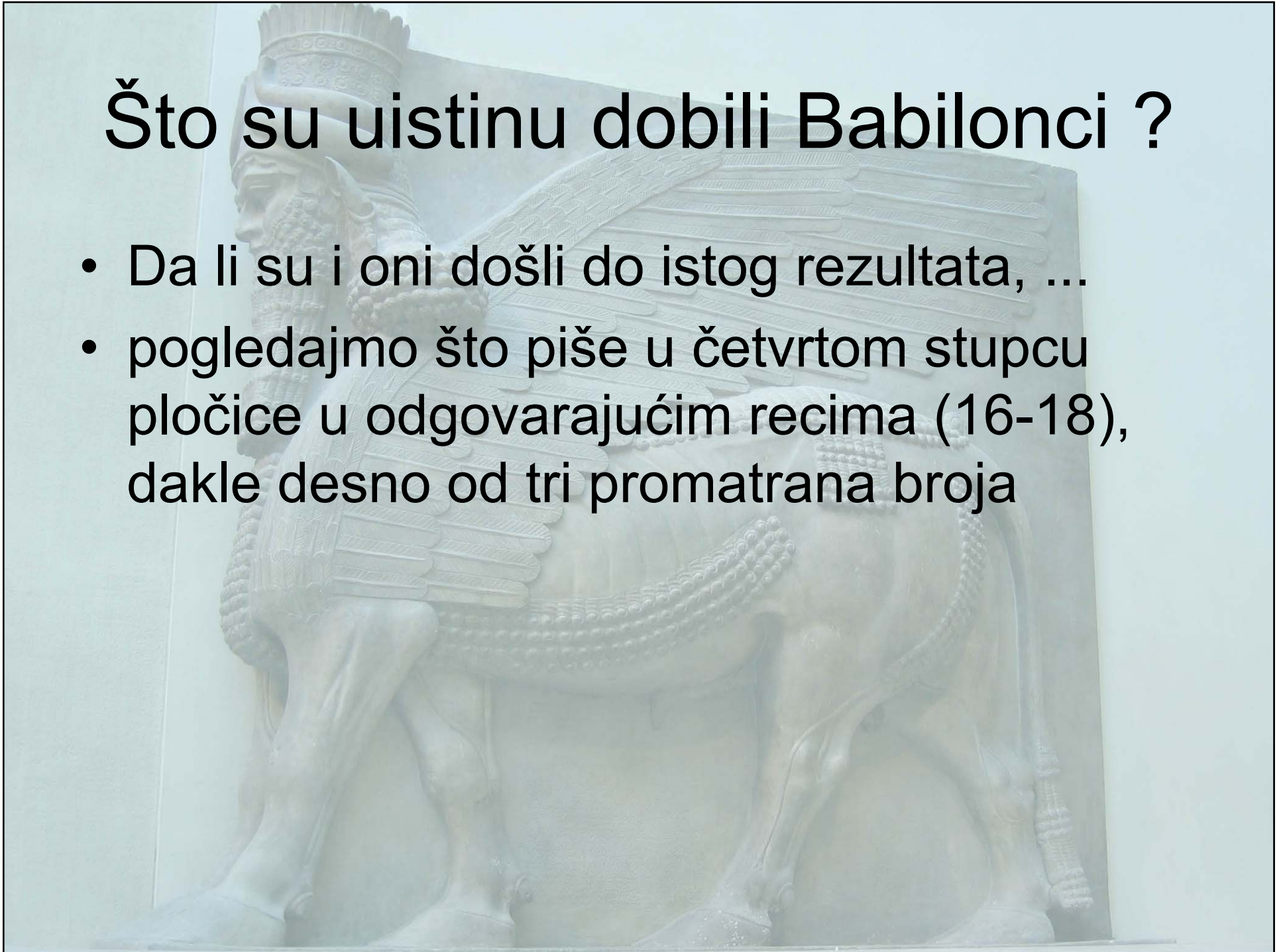
Dakle pišemo da je umnožak brojeva:

2 24 i **25** jednak jedinici

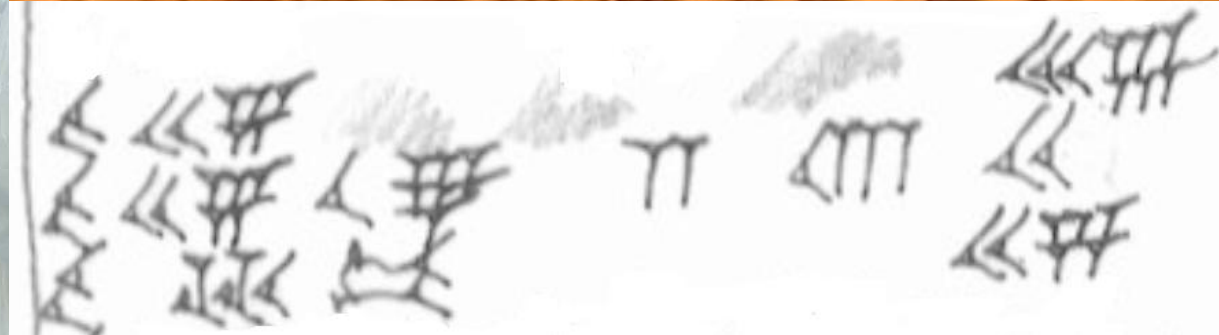
Opet, za razliku od dekadskog sustava, oba broja u seksagezimalnom prikazu imaju konačan broj znamenki

Što su uistinu dobili Babilonci ?

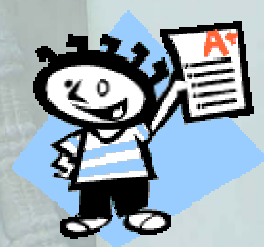
- Da li su i oni došli do istog rezultata, ...
- pogledajmo što piše u četvrtom stupcu pločice u odgovarajućim recima (16-18), dakle desno od tri promatrana broja



Izvadak tablice – stražnja strana red 16-18, četvrti stupac



0	25				36
0	25	17	2	13	20
0	?	?			25



Zašto im je trebala takva tablica ?

- Babilonci nisu znali dijeliti brojeve
- ... jedini način dijeljenja je bio množenje sa recipročnom vrijednosti
- Kako naći recipročnu vrijednost ?
 - primjenom tablice
- Međutim samo neki brojevi imaju recipročnu vrijednost sa konačnim prikazom u seksagezimalnom sustavu

Regularni seksagezimalni brojevi

- Takve brojeve zvali su **regularnim**
- npr. 30 je recipročno od 2, jer jedan sat ima 2 puta po 30 minuta, odnosno dva puta po pola sata,
 - dakle broj 30 je istovremeno i cijeli broj 30 i frakcija baze 60 koja iznosi jednu polovinu
- slično 15 je recipročno od 4, jer jedna četvrtina sata traje 15 minuta
 - dakle broj 15 predstavlja i jednu četvrtinu

Zadaća tablice AO 6456

- Popisati što veći broj seksagezimalnih regularnih brojeva u rasponu od 1 do 3
- Naravno, sa pripadnom recipročnom vrijednosti
- Prilikom dijeljenja dovoljno je “konzultirati” tablicu i provjeriti da li traženi broj uopće ima konačnu recipročnu vrijednost
- Ako ima, pročitaj je iz tablice, a dijeljenje ostvareno množenjem biti će “savršeno” točno

Tablica recipročnih vrijednosti

- Potražimo sve parove regularnih brojeva
- *igi-n-ga'l-bi* $1/n$
- ovi parovi se uobičajeno nazivaju
– *igum* i *igibum*
- mi bi rekli x i $1/x$
- uzmimo samo jednoznamenasti *igum*, te dobivamo

001	1	-	1
002	2	-	30
003	3	-	20
004	4	-	15
005	5	-	12
006	6	-	10
007	8	-	7:30
008	9	-	6:40
009	10	-	6
010	12	-	5
011	15	-	4
012	16	-	3:45
013	18	-	3:20
014	20	-	3
015	24	-	2:30
016	25	-	2:24
017	27	-	2:13:20
018	30	-	2
019	32	-	1:52:30
020	36	-	1:40
021	40	-	1:30
022	45	-	1:20
023	48	-	1:15
024	50	-	1:12
025	54	-	1:06:40

Tablica recipročnih vrijednosti

- Neki parovi se ponavljaju jer je

$$1/2 = 30$$

kao i:

$$1/30=2$$

Radi toga, tablica se često piše u skraćenoj formi:

001	1	-	1
002	1:06:40	-	54
003	1:12	-	50
004	1:15	-	48
005	1:20	-	45
006	1:30	-	40
007	1:40	-	36
008	1:52:30	-	32
009	2	-	30
010	2:13:20	-	27
011	2:24	-	25
012	2:30	-	24
013	3	-	20
014	3:20	-	18
015	3:45	-	16
016	4	-	15
017	5	-	12
018	6	-	10
019	6:40	-	9
020	7:30	-	8

Svi parovi uz dvoznamenkasti *igum*

001	1	- 1	038	2:42	- 22:13:20
002	1:02:30	- 57:36	039	2:46:40	- 21:36
003	1:04	- 56:15	040	2:48:45	- 21:20
004	1:06:40	- 54	041	2:52:48	- 20:50
005	1:07:30	- 53:20	042	2:57:46:40	- 20:15
006	1:09:07:12	- 52:05	043	3	- 20
007	1:10:18:45	- 51:12	044	3:07:30	- 19:12
008	1:12	- 50	045	3:12	- 18:45
009	1:14:04:26:40	- 48:36	046	3:20	- 18
010	1:15	- 48	047	3:30:56:15	- 17:04
011	1:20	- 45	048	3:36	- 16:40
012	1:21	- 44:26:40	049	3:42:13:20	- 16:12
013	1:23:20	- 43:12	050	3:45	- 16
014	1:24:22:30	- 42:40	051	4	- 15
015	1:26:24	- 41:40	052	4:03	- 14:48:53:20
016	1:28:53:20	- 40:30	053	4:10	- 14:24
017	1:30	- 40	054	4:16	- 14:03:45
018	1:33:45	- 38:24	055	4:26:40	- 13:30
019	1:36	- 37:30	056	4:30	- 13:20
020	1:38:45:55:33:20	- 36:27	057	4:41:15	- 12:48
021	1:40	- 36	058	4:48	- 12:30
022	1:45:28:07:30	- 34:08	059	4:56:17:46:40	- 12:09
023	1:46:40	- 33:45	060	5	- 12
024	1:48	- 33:20	061	5:20	- 11:15
025	1:51:06:40	- 32:24	062	5:24	- 11:06:40
026	1:52:30	- 32	063	5:33:20	- 10:48
027	1:55:12	- 31:15	064	5:37:30	- 10:40
028	2	- 30	065	5:45:36	- 10:25
029	2:05	- 28:48	066	6	- 10
030	2:08	- 28:07:30	067	6:15	- 9:36
031	2:13:20	- 27	068	6:24	- 9:22:30
032	2:15	- 26:40	069	6:40	- 9
033	2:20:37:30	- 25:36	070	6:45	- 8:53:20
034	2:24	- 25	071	7:01:52:30	- 8:32
035	2:28:08:53:20	- 24:18	072	7:12	- 8:20
036	2:30	- 24	073	7:24:26:40	- 8:06
037	2:40	- 22:30	074	7:30	- 8

Broj unikatnih regularnih parova

#znamenaka <i>igum</i>	# parova <i>igum- igibum</i>	max dužina <i>igibum</i> (#znam.)
1	20	3
2	74	6
3	167	7

Zadaća tablice AO 6456

- U tablici AO 6456 su popisane recipročne vrijednosti za *igum* u rasponu od 1 do 3
- Pri tome, se razmatraju samo regularni *igumi* sa najviše do 5 seksagezimalnih znamenki iza nepostojeće decimalne točke
- Dakle oblika:
 - U VV WW XX YY ZZ
 - gdje je $U=1$, ili 2

Točnost *iguma* sa 5 seksimala

- Svaka seksagezimalna znamenka je po svojoj “težini” ekvivalentna 1.78 dekadskih znamenki,
 - jer je $\log_{10}(60)=1.78$
- Dakle 5 znamenaka u seksagezimalnom sustavu je ekvivalentno 9 dekadskih znamenki

Očekivani broj recipročnih parova

- Koliko ima regularnih *iguma* u navedenom rasponu i kako ih naći?
- Svi navedeni regularni *igumi* u cjelobrojnom prikazu moraju zadovoljavati slijedeće svojstvo:
 - da su im jedini prim faktori: 2, 3, ili 5
- Dakle moraju biti oblika:
 - $igum = 2^i * 3^j * 5^k$, gdje su $i, j, k \in \mathbb{N}_0$

Očekivani broj recipročnih parova

- Koliko su uspješni bili Babilonci u popisivanju svih regularnih parova?
- Od ukupno 232 unikatna para u tablici ih je navedeno 137
- Preostalih 95 im je ili promaklo, ili nije stalo na ionako izuzetno veliku tablicu
- Vidi se da su imali problem sa prostorom, jer se ponekad čak i dva para nalaze u retku predviđenom za samo jedan par!

Popis svih parova 1/8

001	1	- 60	001
002	1:00:16:53:53:20	- 59:43:10:50:52:48	002
003	1:00:40:53:20	- 59:19:34:13:07:30	003
004	1:00:45	- 59:15:33:20	004
005	1:01:02:06:33:45	- 58:58:56:38:24	005
006	1:01:26:24	- 58:35:37:30	006
007	1:01:30:33:45	- 58:31:39:35:18:31:06:40	007
008	1:01:43:42:13:20	- 58:19:12	008
009	1:02:08:16:12:48	- 57:56:08:34:22:47:34:41:15	009
010	1:02:12:28:48	- 57:52:13:20	010
011	1:02:30	- 57:36	010
012	1:02:59:08:09:36	- 57:09:21:19:00:44:26:40	011
013	1:03:12:35:33:20	- 56:57:11:15	012
014	1:03:16:52:30	- 56:53:20	013
015	1:04	- 56:15	014
016	1:04:43:36:53:20	- 55:37:05:49:48:16:52:30	015
017	1:04:48	- 55:33:20	016
018	1:05:06:15	- 55:17:45:36	017
019	1:05:32:09:36	- 54:55:53:54:22:30	018
020	1:05:36:36	- 54:52:10:51:51:06:40	019
021	1:05:55:04:41:15	- 54:36:48	020
022	1:06:21:18:43:12	- 54:15:12:30	021
023	1:06:25:48:27	- 54:11:32:12:41:35:28:23:42	022
024	1:06:40	- 54	023
025	1:07:30	- 53:20	024
026	1:07:49:00:37:30	- 53:05:02:58:33:36	025
027	1:08:16	- 52:44:03:45	026
028	1:08:20:37:30	- 52:40:29:37:46:40	027
029	1:09:07:12	- 52:05	028
030	1:09:26:40	- 51:50:24	029

Popis svih parova 2/8

031	1:09:54:18:14:24	-	51:29:54:17:13:35:37:30	
032	1:09:59:02:24	-	51:26:25:11:06:40	
033	1:10:18:45	-	51:12	026
034	1:10:51:31:40:48	-	50:48:18:56:53:59:30:22:13	
035	1:11:06:40	-	50:37:30	027
036	1:11:11:29:03:45	-	50:34:04:26:40	028
037	1:12	-	50	029
038	1:12:20:16:40	-	49:45:59:02:24	
039	1:12:49:04	-	49:26:18:30:56:15	030
040	1:12:54	-	49:22:57:46:40	031
041	1:13:14:31:52:30	-	49:09:07:12	032
042	1:13:43:40:48	-	48:49:41:15	033
043	1:13:48:40:30	-	48:46:22:59:25:25:55:33:19	034
044	1:14:04:26:40	-	48:36	035
045	1:14:38:58:33:36	-	48:13:31:06:40	
046	1:15	-	48	036
047	1:15:21:07:21:40	-	47:46:32:40:42:14:24	
048	1:15:51:06:40	-	47:27:39:22:30	037
049	1:15:56:15	-	47:24:26:40	038
050	1:16:48	-	46:52:30	039
051	1:16:53:12:11:15	-	46:49:19:40:14:48:53:20	040
052	1:17:09:37:46:40	-	46:39:21:36	041
053	1:17:40:20:16	-	46:20:54:51:30:14:03:45	042
054	1:17:45:36	-	46:17:46:40	
055	1:18:07:30	-	46:04:48	043
056	1:18:38:35:31:12	-	45:46:34:55:18:45	
057	1:18:43:55:12	-	45:43:29:03:12:35:33:20	044
058	1:19:00:44:26:40	-	45:33:45	045
059	1:19:06:05:37:30	-	45:30:40	
060	1:19:42:58:08:24	-	45:09:36:50:34:39:33:39:45	

Popis svih parova 3/8

061	1:20	- 45	046
062	1:20:54:31:06:40	- 44:29:40:39:50:37:30	047
063	1:21	- 44:26:40	048
064	1:21:22:48:45	- 44:14:12:28:48	049
065	1:21:55:12	- 43:56:43:07:30	050
066	1:22:00:45	- 43:53:44:41:28:53:20	051
067	1:22:51:01:37:04	- 43:27:06:25:47:05:41:00:56	052
068	1:22:56:38:24	- 43:24:10	052
069	1:23:02:15:33:45	- 43:21:13:46:09:16:22:43	053
070	1:23:20	- 43:12	053
071	1:23:58:50:52:48	- 42:52:00:59:15:33:20	054
072	1:24:22:30	- 42:40	055
073	1:25:20	- 42:11:15	056
074	1:25:25:46:52:30	- 42:08:23:42:13:20	057
075	1:26:24	- 41:40	058
076	1:26:48:20	- 41:28:19:12	059
077	1:27:22:52:48	- 41:11:55:25:46:52:30	060
078	1:27:28:48	- 41:09:08:08:53:20	060
079	1:27:53:26:15	- 40:57:36	061
080	1:28:28:24:57:36	- 40:41:24:22:30	062
081	1:28:34:24:36	- 40:38:39:09:31:11:36:17:47	062
082	1:28:53:20	- 40:30	063
083	1:29:40:50:24:27	- 40:08:32:44:57:28:29:55:20	064
084	1:30	- 40	065
085	1:30:25:20:50	- 39:48:47:13:55:12	066
086	1:31:01:20	- 39:33:02:48:45	067
087	1:31:07:30	- 39:30:22:13:20	066
088	1:32:09:36	- 39:03:45	067
089	1:32:15:50:37:30	- 39:01:06:23:32:20:44:26:39	068
090	1:32:35:33:20	- 38:52:48	069

Popis svih parova 4/8

091	1:33:12:24:19:12	-	38:37:25:42:55:11:43:07:30	
092	1:33:18:43:12	-	38:34:48:53:20	070
093	1:33:45	-	38:24	071
094	1:34:11:24:12:05	-	38:13:14:08:33:47:31:12	
095	1:34:28:42:14:24	-	38:06:14:12:40:29:37:46:40	
096	1:34:48:53:20	-	37:58:07:30	072
097	1:34:55:18:45	-	37:55:33:20	073
098	1:36	-	37:30	074
099	1:36:27:02:13:20	-	37:19:29:16:48	075
100	1:37:05:25:20	-	37:04:43:53:12:11:15	
101	1:37:12	-	37:02:13:20	076
102	1:37:39:22:30	-	36:51:50:24	077
103	1:38:18:14:24	-	36:37:15:56:15	078
104	1:38:24:54	-	36:34:47:14:34:04:26:40	
105	1:38:45:55:33:20	-	36:27	079
106	1:39:31:58:04:48	-	36:10:08:20	
107	1:39:38:42:40:30	-	36:07:41:28:27:43:38:55:48	
108	1:40	-	36	080
109	1:41:08:08:53:20	-	35:35:44:31:52:30	081
110	1:41:15	-	35:33:20	082
111	1:41:43:30:56:15	-	35:23:21:59:02:24	
112	1:42:24	-	35:09:22:30	083
113	1:42:30:56:15	-	35:06:59:45:11:06:40	
114	1:43:33:47:01:20	-	34:45:41:08:37:40:32:48:45	
115	1:43:40:48	-	34:43:20	084
116	1:44:10	-	34:33:36	085
117	1:44:51:27:21:36	-	34:19:56:11:29:03:45	
118	1:44:58:33:36	-	34:17:36:47:24:26:40	
119	1:45:28:07:30	-	34:08	086
120	1:46:17:17:31:12	-	33:52:12:37:55:59:40:14:48	

Popis svih parova 5/8

121	1:46:40	- 33:45	087
122	1:48	- 33:20	088
123	1:48:30:25	- 33:10:39:21:36	089
124	1:49:13:36	- 32:57:32:20:37:30	090
125	1:49:21	- 32:55:18:31:06:40	091
126	1:49:51:47:48:45	- 32:46:04:48	092
127	1:50:35:31:12	- 32:33:07:30	092
128	1:50:43:00:45	- 32:30:55:19:36:57:17:02:13	093
129	1:51:06:40	- 32:24	094
130	1:51:58:27:50:24	- 32:09:00:44:26:40	095
131	1:52:30	- 32	095
132	1:53:01:41:02:30	- 31:51:01:47:08:09:36	096
133	1:53:46:40	- 31:38:26:15	096
134	1:53:54:22:30	- 31:36:17:46:40	097
135	1:55:12	- 31:15	098
136	1:55:44:26:40	- 31:06:14:24	099
137	1:56:30:30:24	- 30:53:56:34:20:09:22:30	100
138	1:56:38:24	- 30:51:51:06:40	100
139	1:57:11:15	- 30:43:12	101
140	1:57:57:53:16:48	- 30:31:03:16:52:30	102
141	1:58:05:52:48	- 30:28:59:22:08:23:42:13:20	103
142	1:58:31:06:40	- 30:22:30	103
143	1:58:39:08:26:15	- 30:20:26:40	104
144	1:59:34:27:12:36	- 30:06:24:33:43:06:22:26:29	104
145	2	- 30	105
146	2:00:33:47:46:40	- 29:51:35:25:26:24	106
147	2:01:21:46:40	- 29:39:47:06:33:45	106
148	2:01:30	- 29:37:46:40	106
149	2:02:04:13:07:30	- 29:29:28:19:12	106
150	2:02:52:48	- 29:17:48:45	106

Popis svih parova 6/8

151	2:03:01:07:30	-	29:15:49:47:39:15:33:20	107
152	2:03:27:24:26:40	-	29:09:36	108
153	2:04:16:32:25:36	-	28:58:04:17:11:23:47:20:37	
154	2:04:24:57:36	-	28:56:06:40	109
155	2:05	-	28:48	110
156	2:05:58:16:19:12	-	28:34:40:39:30:22:13:20	
157	2:06:25:11:06:40	-	28:28:35:37:30	
158	2:06:33:45	-	28:26:40	111
159	2:08	-	28:07:30	112
160	2:08:08:40:18:45	-	28:05:35:48:08:53:20	
161	2:09:27:13:46:40	-	27:48:32:54:54:08:26:15	
162	2:09:36	-	27:46:40	113
163	2:10:12:30	-	27:38:52:48	114
164	2:11:04:19:12	-	27:27:56:57:11:15	
165	2:11:13:12	-	27:26:05:25:55:33:20	
166	2:11:50:09:22:30	-	27:18:24	
167	2:12:42:37:26:24	-	27:07:36:15	
168	2:12:51:36:54	-	27:05:46:06:20:47:44:11:51	
169	2:13:20	-	27	115
170	2:15	-	26:40	116
171	2:15:38:01:15	-	26:32:31:29:16:48	
172	2:16:32	-	26:22:01:52:30	117
173	2:16:41:15	-	26:20:14:48:53:20	118
174	2:18:14:24	-	26:02:30	
175	2:18:23:45:56:15	-	26:00:44:15:41:33:49:37:46	
176	2:18:53:20	-	25:55:12	119
177	2:19:48:36:28:48	-	25:44:57:08:36:47:48:45	
178	2:19:58:04:48	-	25:43:12:35:33:20	
179	2:20:37:30	-	25:36	120
180	2:21:43:03:21:36	-	25:24:09:28:26:59:45:11:06	

Popis svih parova 7/8

181	2:22:13:20	-	25:18:45	
182	2:22:22:58:07:30	-	25:17:02:13:20	121
183	2:24	-	25	122
184	2:24:40:33:20	-	24:52:59:31:12	
185	2:25:38:08	-	24:43:09:15:28:07:30	123
186	2:25:48	-	24:41:28:53:20	
187	2:26:29:03:45	-	24:34:33:36	
188	2:27:27:21:36	-	24:24:50:37:30	
189	2:27:37:21	-	24:23:11:29:42:42:57:46:39	124
190	2:28:08:53:20	-	24:18	125
191	2:29:17:57:07:12	-	24:06:45:33:20	
192	2:29:28:04:00:45	-	24:05:07:38:58:29:05:57:12	
193	2:30	-	24	
194	2:30:42:14:43:20	-	23:53:16:20:21:07:12	
195	2:31:42:13:20	-	23:43:49:41:15	126
196	2:31:52:30	-	23:42:13:20	
197	2:33:36	-	23:26:15	127
198	2:33:46:24:22:30	-	23:24:39:50:07:24:26:40	
199	2:34:19:15:33:20	-	23:19:40:48	128
200	2:35:20:40:32	-	23:10:27:25:45:07:01:52:30	129
201	2:35:31:12	-	23:08:53:20	
202	2:36:15	-	23:02:24	130
203	2:37:17:11:02:24	-	22:53:17:27:39:22:30	
204	2:37:27:50:24	-	22:51:44:31:36:17:46:40	
205	2:38:01:28:53:20	-	22:46:52:30	
206	2:38:12:11:15	-	22:45:20	131
207	2:39:25:56:16:48	-	22:34:48:25:17:19:46:49:52	
208	2:40	-	22:30	
209	2:41:49:02:13:20	-	22:14:50:19:55:18:45	
210	2:42	-	22:13:20	

Popis svih parova 8/8

211	2:42:45:37:30	-	22:07:06:14:24	
212	2:43:50:24	-	21:58:21:33:45	
213	2:44:01:30	-	21:56:52:20:44:26:40	
214	2:45:42:03:14:08	-	21:43:33:12:53:32:50:30:28	
215	2:45:53:16:48	-	21:42:05	132
216	2:46:04:31:07:30	-	21:40:36:53:04:38:11:21:29	
217	2:46:40	-	21:36	133
218	2:47:57:41:45:36	-	21:26:00:29:37:46:40	
219	2:48:45	-	21:20	134
220	2:49:32:31:33:45	-	21:14:01:11:25:26:24	
221	2:50:40	-	21:05:37:30	
222	2:50:51:33:45	-	21:04:11:51:06:40	
223	2:52:48	-	20:50	
224	2:53:36:40	-	20:44:09:36	
225	2:54:45:45:36	-	20:35:57:42:53:26:15	
226	2:54:57:36	-	20:34:34:04:26:40	
227	2:55:46:52:30	-	20:28:48	135
228	2:56:56:49:55:12	-	20:20:42:11:15	
229	2:57:08:49:12	-	20:19:19:34:45:35:48:08:53	
230	2:57:46:40	-	20:15	136
231	2:59:21:40:48:54	-	20:04:16:22:28:44:14:57:40	
232	3	-	20	137

Rad koji provodi sličnu analizu

- vidi link:
- www-dapnia.cea.fr/Phocea/file.php?class=std&file=Seminaires/1421/t1421_1.pdf
- **“Calculer en base 60 il y a 4000 ans en Mésopotamie”**

Christine Proust

Equipe REHSEIS

ENS - Site «!Culture*MATH!*»

Popis svih 232 *iguma* (*=fali)

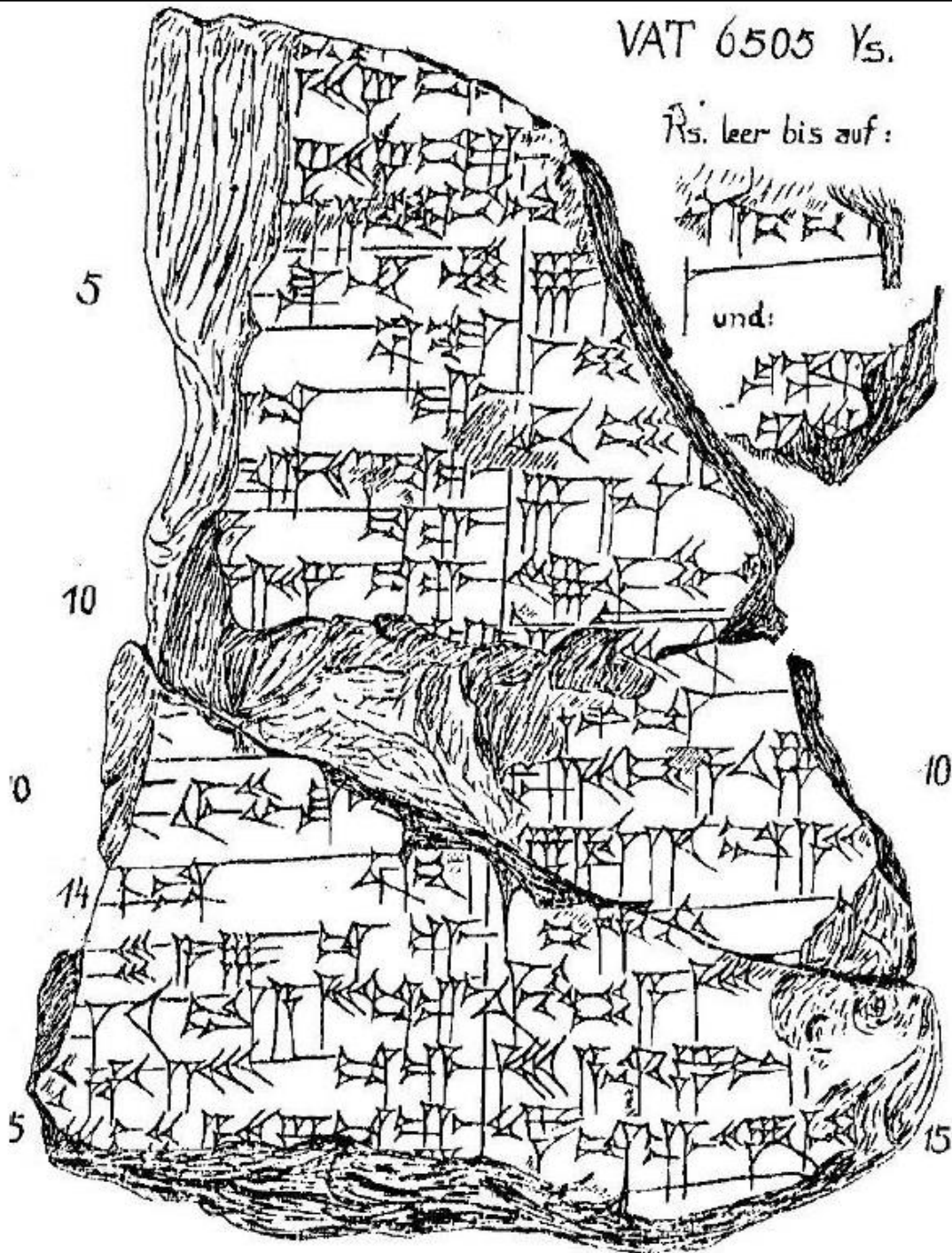
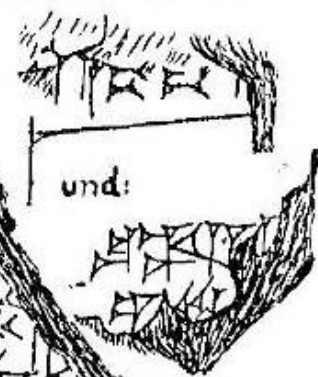
1	1.13.14.31.52.30	1.28.28.24.57.36	*2.6.25.11.6.40	
1.0.16.53.53.20	1.13.43.40.48	*1.28.34.24.36	2.6.33.45	*2.31.52.30
1.0.40.53.20	1.13.48.40.30	1.28.53.20	2.8	2.33.36
1.0.45	1.14.4.26.40	1.29.40.50.24.27	*2.8.8.40.18.45	*2.33.46.24.22.30
1.1.2.6.33.45	*1.14.38.58.33.36	1.30	*2.9.27.13.46.40	2.34.19.15.33.20
1.1.26.24	1.15	*1.30.25.20.50	2.9.36	2.35.20.40.32
1.1.30.33.45.	*1.15.21.7.21.40	*1.31.1.20	2.10.12.30	*2.35.31.12
1.1.43.42.13.20	1.15.51.6.40	1.31.7.30	*2.11.4.19.12	2.36.15
*1.2.8.16.12.48	1.15.56.15	1.32.9.36	*2.11.13.12	*2.37.17.11.2.24
1.2.12.28.48	1.16.48	1.32.15.50.37.30	*2.11.50.9.22.30	*2.37.27.50.24
1.2.30	1.16.53.12.11.15	1.32.35.33.20	*2.12.42.37.26.24	*2.38.1.28.53.20
*1.2.59.8.9.36	1.17.9.37.46.40	*1.33.12.24.19.12	*2.12.51.36.54	2.38.12.11.15
1.3.12.35.33.20	1.17.40.20.16	1.33.18.43.12	2.13.20	*2.39.25.56.16.48
1.3.16.52.30	*1.17.45.36	1.33.45	2.15	*2.40
1.4	1.18.7.30	*1.34.11.24.12.5	*2.15.38.1.15	*2.41.49.2.13.20
*1.4.43.36.53.20	*1.18.38.35.31.12	*1.34.28.42.14.24	2.16.32	*2.42
1.4.48	1.18.43.55.12	1.34.48.53.20	2.16.41.15	*2.42.45.37.30
1.5.6.15	1.19.0.44.26.40	1.34.55.18.45	*2.18.14.24	*2.43.50.24
1.5.32.9.36	*1.19.6.5.37.30	1.36	*2.18.23.45.56.15	*2.44.1.30
1.5.36.36	*1.19.42.58.8.24	1.36.27.2.13.20	2.18.53.20	*2.45.42.3.14.8
1.5.55.4.41.15	1.20	*1.37.5.25.20	*2.19.48.36.28.48	2.15.53.16.48
*1.6.21.18.43.12	1.20.54.31.6.40	1.37.12	*2.19.58.4.48	*2.46.4.31.7.30
1.6.25.48.27	1.21	1.37.39.22.30	2.20.37.30	2.46.40
1.6.40	1.21.22.48.45	1.38.18.14.24	*2.21.43.3.21.36	*2.47.57.41.45.36
1.7.30	1.21.55.12	*1.38.24.54	*2.22.13.20	2.48.45
*1.7.49.0.37.30	1.22.0.45	1.38.45.55.33.20	2.22.22.58.7.30	*2.49.32.31.33.45
1.8.16	*1.22.51.1.37.4	*1.39.31.58.4.48	2.24	*2.50.40
1.8.20.37.30	1.22.56.38.24	*1.39.38.42.40.30	*2.24.40.33.20	*2.50.51.33.45
1.9.7.12	*1.23.2.15.33.45	1.40	2.25.38.8	*2.52.48
1.9.26.40	1.23.20	1.41.8.8.53.20	*2.25.48	*2.53.36.40
*1.9.54.18.14.24	1.23.58.50.52.48	1.41.15	*2.26.29.3.45	*2.54.45.45.36
*1.9.59.2.24	1.24.22.30	*1.41.43.30.56.15	*2.27.27.21.36	*2.54.57.36
1.10.18.45	1.25.20	1.42.24	2.27.37.21	2.55.46.52.30
*1.10.51.31.40.48	1.25.25.46.52.30	*1.42.30.56.15	2.28.53.20	*2.56.56.49.55.12
1.11.6.40	1.26.24	*1.43.33.47.1.20	*2.29.17.57.7.12	*2.57.8.49.12
1.11.11.29.3.45	1.26.48.20	1.43.40.48	*2.29.28.4.0.45	2.57.46.41
1.12	*1.27.22.52.48	1.44.10	*2.30	*2.59.21.40.48.54
*1.12.20.16.40	1.27.28.48	*1.44.51.27.21.36	*2.30.42.14.43.20	
1.12.49.4	1.27.53.26.15	*1.44.58.33.36	2.31.42.13.20	(3)
1.12.54				

Recipročne vrijednosti složenijih regularnih brojeva

- Što napraviti kada je potrebno odrediti recipročnu vrijednost broja koji nije u raspoloživoj tablici ?
 - npr. imamo samo tablicu sa 20 osnovnih parova jednoznamenkastih iguma?
- Babilonci koriste postupak inverzije kojim se problem svodi na dvije jednostavnije (tablične) inverzije i dva množenja!
- Poznat je pod nazivom “Tehnika”

VAT 6505 Ys.

Rs. leer bis auf:



Ulomak VAT6505

- Opisuje “**Tehniku**” nalaženja inverza
- Pretpostavljeno mjesto nalaska je Sippar
- Potiče iz Staro babilonske ere

“Tehnika”

- Transkripcija VAT6505 koja opisuje “Tehniku”:
 - **2 13 20**. Koja mu je recipročna vrijednost?
 - Ti, u svom postupku
 - nađi recipročnu vrijednost od **3 20**. Ti vidiš **18**.
 - Pomnoži **18** sa **2 10**. Ti vidiš **39**.
 - Dodaj **1**. Ti vidiš **40**.
 - Nađi recipročnu vrijednost od **40**. Ti vidiš **1 30**.
 - Pomnoži **1 30** sa **18**.
 - Ti vidiš **27**. **27** je njegova recipročna vrijednost
 - Takav je postupak.

“Tehnika”

- Princip korišten u “Tehnici”:
 - Odredimo $n_i = 1/n$
 - Rastavi $n = a + b$
 - Nađi (iz tablice) inverz od $b \dots b_i$
 - Pomnoži n sa b_i u dva koraka:
 - $c = a \cdot b_i$
 - $d = n \cdot b_i = c + 1$
 - Nađi (iz tablice) inverz od $d \dots d_i$
 - Pomnoži $b_i \cdot d_i$
 - Rezultat je $b_i \cdot d_i = b_i \cdot (1/(b_i \cdot n)) = 1/n = n_i$

$$n_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a \cdot \frac{1}{b} + 1} = b_i \cdot \frac{1}{a \cdot b_i + 1} = b_i \cdot \frac{1}{d} = b_i \cdot d_i$$

“Tehnika”

- Ilustracija na primjeru $n=25$ (dvije znamenke!)
 - Odredimo $n_i=1/n$
 - Rastavi $n=a+b$
 - $a=2$ (na višem mjestu)
 - $b=5$ (na nižem mjestu)
 - Nađi (iz tablice) inverz od $b=5 \dots b_i=12$
 - Pomnoži n sa b_i u dva koraka:
 - $c=a*b_i=2*12=24$
 - $d=n*b_i=c+1=25$
 - Nađi (iz tablice) inverz od $d=25 \dots d_i=224$
 - Pomnoži $b_i*d_i=12 * 224=2848$
 - Dakle, rezultat je $1/n=n_i=b_i*d_i=2848$

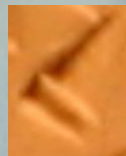


“Tehnika”

- Da li uvijek radi?
 - ... nužna pretpostavka je da oba broja: b i d imaju tablični inverz!
 - za broj b to se može osigurati pogodnim rastavom broja n , ali
 - za pomoćni broj d nema garancije da se uvijek radi o regularnom broju s tabličnim inverzom!
- Dakle ponekad “Tehnikom” nije moguće naći recipročnu vrijednost.

Specifičnosti korištenja nule na tablici AO6456

- Za razliku od staro-babilonskih zapisa koji nisu koristili nulu, u tablici AO6456 ona se koristi unutar broja na mjestima znamenki koje su jednake nuli.
- To je novost uvedena u Seleukidnom razdoblju
- Simbol za nulu izgleda kao dvije desetke koje se šire gore desno, tako da im se gornja noga poklapa:



Specifičnosti korištenja nule na tablici AO6456

- Nula se koristi i ispred recipročnog broja u obliku 0.XX YY ZZ, kao delimiter *iguma* i *igibuma*, a obično je potpisana iz reda u red.
- Ponekad se koristi i ispred znamenke jedan, naizgled bez razloga i pravila, što će biti pokazano na primjerima

Specifičnosti korištenja devetke

- Koristi se i posebni simbol za znamenku devet
 - umjesto 9 stupića (jedinica) organiziranih u matricu 3x3 koristi se:
 - simbol od 3 desetke koje se šire prema dolje desno, tako da im se donja noga preklapa



– npr. 2 9 36



29

Pravilno korištenje nule i devetke – 23. red prvi i drugi stupac

1	50	43	0	45	0	32	30	55	19	36	57	17	2	13	20
---	----	----	---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----

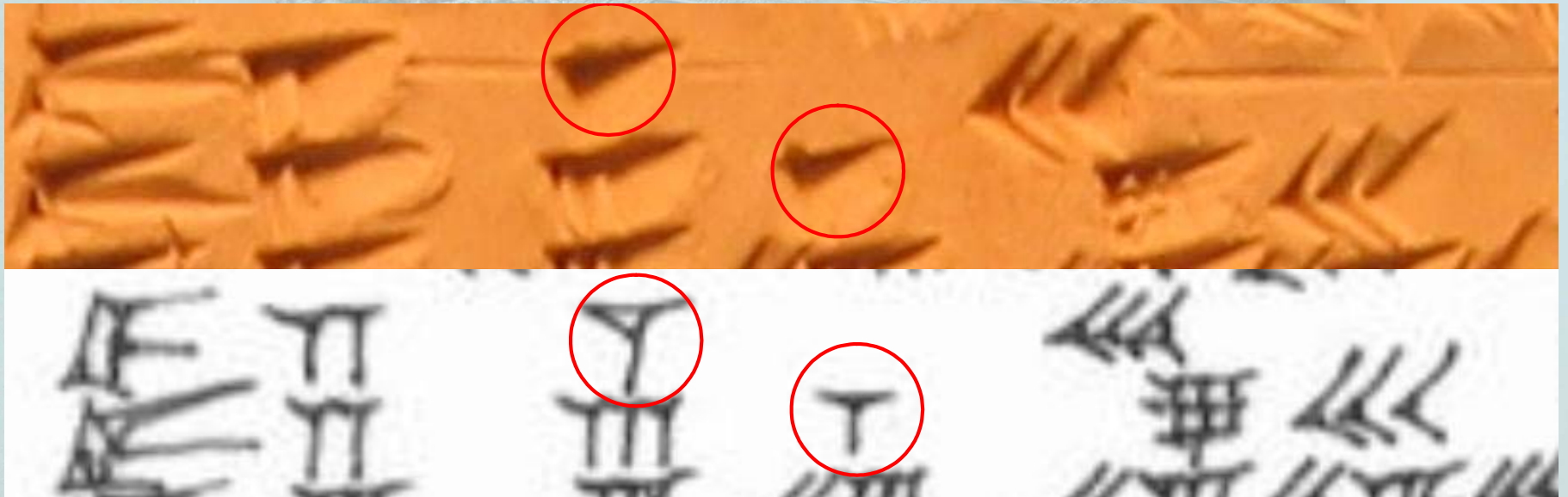
igum treba biti:
1 50 43 00 45

a pripadni *igibum*:
32 30 55 19 36 57 17 02 13 20

Uoči pogrešku u transkripciji broja **55** označenu zelenom bojom
(na stvarnoj pločici je pravilni zapis!)

Uoči i specijalni simbol za **broj 9** (označen plavom bojom)

Uobičajeno korištenje jedinice – 4. i 5. red treći stupac (stražnja strana)



2

1

30

2

3

1

7

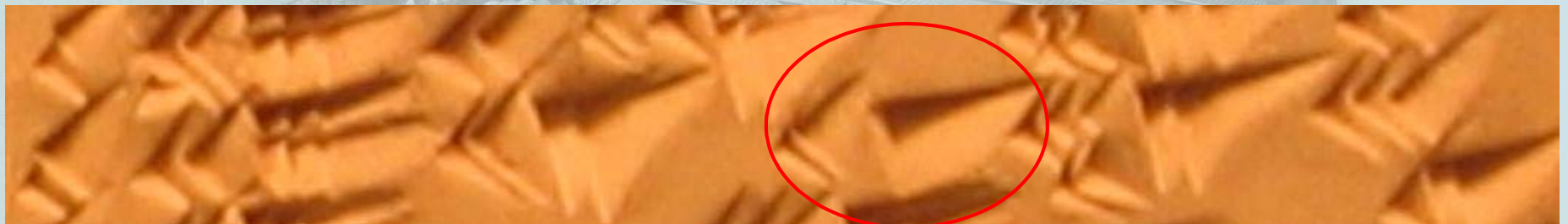
30

Očekivani vrijednost *iguma*:

2 **01** 30,

2 03 **01** 07 30, OK

“Nepotrebno” korištenje nule uz jedinicu – 14. red četvrti stupac



0

26

22

0

1

52

30

igibum treba biti **26 22 01 52 30**, ali zbog nule može biti čitano i kao: **26 22 00 01 52 30** ? Zašto uopće piše nulu?

“Nepotrebno” korištenje nule uz jedinicu – 25. red četvrti stupac



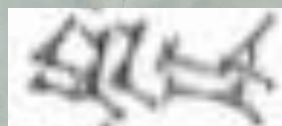
0 23 10 27 25 52 **01** 52 30

Treba biti **23 10 27 25 52 01 52 30**, ali može se čitati i kao:
23 10 27 25 52 00 01 52 30?

Međutim, ovdje je nula jako bliska jedinici pa je manja vjerojatnost pogrešne interpretacije

Drugi simboli

- Povremeno kod jednostavnih brojeva sa malo znamenaka koriste se i specijalni simboli koji se ubacuju u zapis broja, ali
- ... ne poznamo njihovo značenje ☹️



Pogreške u tablici i transkripciji



- Usljed:
 - očitih pogrešaka pisara, koji je ovu tablicu vjerojatno izrađivao prepisivanjem iste takve, ali bez detaljne provjere i razumijevanja 😊
 - nejasno napisanih znamenki koje se mogu interpretirati na razne načine
 - uslijed neprecizno provedene transkripcije koja je rađena početkom prošlog stoljeća

Primjeri pogrešaka pisara

- Prilikom ručne provjere sadržaja zadnje četvrtine tablice utvrđeno je da su na dva mjesta ispuštene cijele znamenke
- npr. umjesto igibum=26 20 14 48 53 20
- u tablici piše 26 20 38 53 20
- umjesto igibum= 23 10 27 25 45 07 01 52 30
- u tablici piše 23 10 27 25 52 01 52 30
- Uočite da ovo nisu obični tipfeleri ili pogreške u transkripciji

Pogreške u tablici i transkripciji



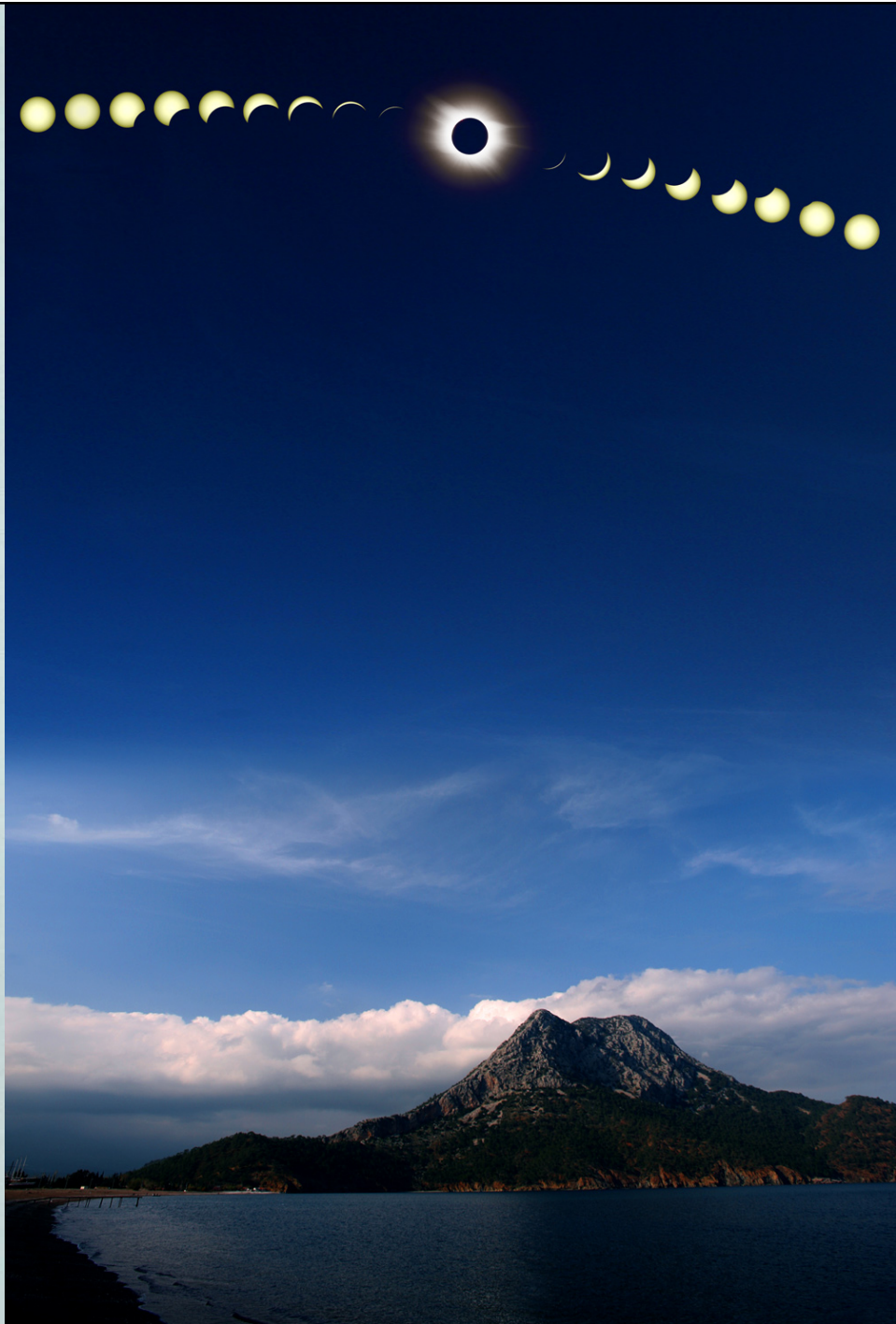
- Usporedbom transkripcije i očekivanog sadržaja, na parovima brojeva koji se nalaze u desnom dijelu stražnje strane tablice, od ukupno 32 analizirana para, pogreške postoje u barem 8 brojeva.
- U pola slučaja to su sigurno pogreške pisara, a u preostaloj polovici to su pogreške interpretacije i transkripcije

Broj znamenaka i točnost *igibuma*

- Kod nekih parova *igibum* je zapisan sa čak 10 seksagezimalnih znamenaka, npr.
- *igum* = **1 50 43 00 45**
- *igibum* = **32 30 55 19 36 57 17 02 13 20**
- To je ekvivalentna dekadaska točnost od 18 točnih znamenki
- Napomenimo da ih *double-float* ima manje od 16, što ukazuje na izvanrednu sofisticiranost ovih ranih matematičara

“Aplikacija” ovakve tablice

- Točnost zapisa korištena u ovoj tablici sigurno nije bila nužna u svakodnevnoj upotrebi (za kruh i mlijeko, 😊)
- Vjerojatno je ključna primjena bila u astronomiji
- Jedna od omiljenih aktivnosti tadašnjih matematičara i astronoma je bila predikcija pomrčina sunca i mjeseca.





LUNAR ECLIPSE

