

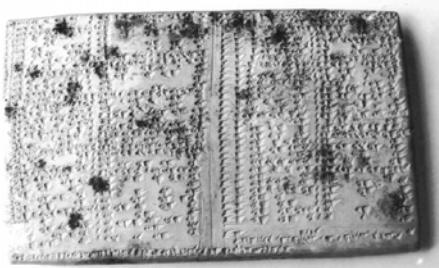
Brojevni sustav i recipročni
brojevi kod Babilonaca u doba
Seleukidnog carstva
Primjer **AO6456**

Prof. Petrinović
FER/ZESOI
09.02.2007

Tablica AO 6456 - kopija



AO 6456 (Uruk, Musée du Louvre)
Grande table d'inverses d'époque séleucide



Gdje je izložena ?
**Département des Antiquités
orientales, Louvre**



AO 6456 - Louvre

• Scribes et savants

Table de division et de conversion des fractions
Époque séleucide (fin du Ier millénaire avant J.-C.), copie d'un original
plus ancien
Warka, ancienne Uruk, Basse Mésopotamie (Irak)
Terre cuite

Table de valeurs réciproques. Division de l'unité par une série de nombres compris entre 1 et 3. Les babyloniens conservèrent le système sexagésimal sumérien pour les textes scientifiques. Il nous est resté de ce mode de calcul la division du cercle en 360°, la mesure des angles en degrés et celle du temps en heures de 60 minutes. Pour les opérations comptables de la vie courante, on utilisait le système décimal. À l'époque séleucide, on introduit le 0 [zéro], une innovation s'inspirant d'un procédé babylonien isolé.

- Acquisition 1918
- Département des Antiquités orientales AO 6456

Vremensko razdoblje

- 331. godine p.n.e. perzijski kralj Darije III poražen je od Aleksandra Velikog
- Nakon Aleksandrove smrti 323. p.n.e njegovo carstvo je podijeljeno među njegovim generalima
- Među njima, najozbiljniji "igrač" je Seleukus I koji se 304. godine proglašava kraljem
- Njega će naslijediti niz od 25 kraljeva, sve do Antioha XII i Tigranesa II

Osinvač Seleukidnog carstva Seleucus I



Seleukidno carstvo (305BC -)



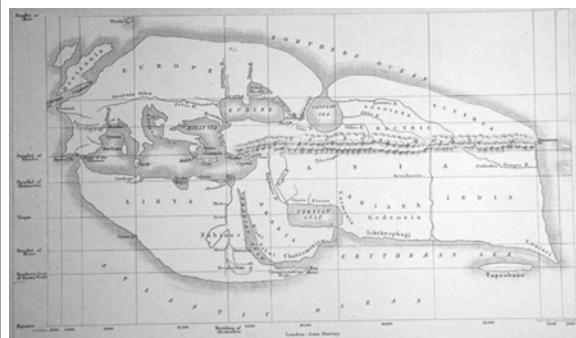
Vremensko razdoblje

- Razvoj babilonske matematike odvijao se u naletima
 - Vrlo značajan period je 18. st. p.n.e u doba kralja Hamurabija
 - Također, značajno je razdoblje u 6. st. p.n.e. za vrijeme Kira Velikog
 - Dakle, vrijeme Seleukidnog carstva predstavlja vrlo moderno doba babilonske matematike, u kojem su aktivni već i brojni grčki i rimske matematičari

Vremensko razdoblje

- U to vrijeme u Grčka je u helenističkom razdoblju,
 - imamo Rimsku republiku,
 - dinastije Zhou, Qin i Han u Kini,
 - i graeco-romansko razdoblje u Egiptu

Karta svijeta prema Eratostenu (276-194 BC)



Miesto náleiska tablice AO 6456

Uruk

Coordinates: 31°18'20"N 45°38'10"E

From Wikipedia, the free encyclopedia

Uruk (Sumerian: URU^{UR}UNUG 𒌆𒂗, Biblical: *Erech*, Greek: Οπόχν or Ωρύσσα, Arabic: وَرْكَاء Warkā'), was an ancient city of Sumer and later Babylonia, situated east of the present bed of the Euphrates, on the line of the ancient *Nil* canal, in a region of marshes, some 30 km east of As-Samawah, Al-Muthannā, Iraq. The theory that the modern name of Iraq could be possibly derived from the name Uruk is not proven. At its height, Uruk probably had 50,000-80,000 residents living in 6 square kilometres of walled area, the largest city in the world at its time. Uruk represents one of the world's first cities, with a dense population. Uruk also saw the rise of the state in Mesopotamia with a full-time bureaucracy, military, and stratified society.

Petoknjižje - Knjiga Postanka, 10. poglavlje

- 1.Ovo je povijest Noinih sinova: Šema, Hama i Jafeta, kojima su se rodili sinovi poslijе Potopa.
- 2.Sinovi su Jafetovi: Gomer, Magog, Madaj, Javan, Tubal, Mešak, Tiras.
- 3.A sinovi su Gomerovi: Aškenaz, Rifat i Togarma.
- 4.Javanovi su opet sinovi: Eliša, Taršiš, Kitici i Dodanci.
- 5.Od njih su se razgraničili narodi po otocima. To su Jafetovi sinovi prema svojim zemljama - svaki s vlastitim jezikom - prema svojim plemenima i narodima.
- 6.Sinovi su Hamovi: Kuš i Misrajim, Put i Kanaan.
- 7.Kuševi su: Seba, Havila, Sabta, Rama i Sabteka. Ramini su: Šeba i Dedan.
- 8.Od Kuša se rodio Nimrod, koji je postao prvi velmoža na zemlji.
- 9.Vojjom Jahve bio je silan lovac. Zato se veli: "Kao Nimrod, silan lovac vojom Jahve."
- 10.Glavno uporište njegova kraljevstva bili su: Babilon, Erek, Akad i Kalne, svu u zemlji Sinearu.
-

Iz enciklopedije ARDA An interactive guide to the works of J.R.R. Tolkein

- Erech
- The hill at the head of the Blackroot Vale.
- An ancient site at the feet of the White Mountains in Gondor, though it seems to have predicated the foundation of that land. Erech was most famous for a huge Stone, said to have fallen from heaven (though in fact brought to Middle-earth by Isildur).



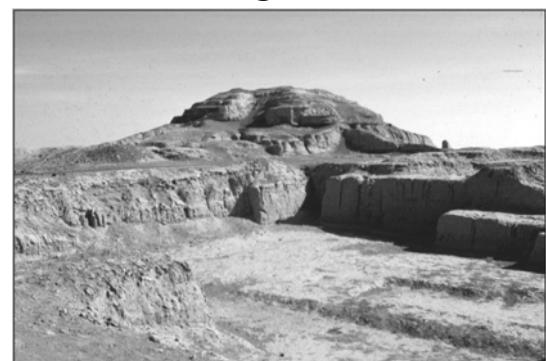
Karta stvarnog grada Uruka



A contour plan of the walled city of Ur (Uruk), one of the most important centres of Sumerian civilization.



Ruševine Zigurata u Uruku



Palača u Uruku



Rekonstrukcija Zigurata



Glavne pisarske škole Ecoles de scribes

en Mésopotamie (vers -1800)



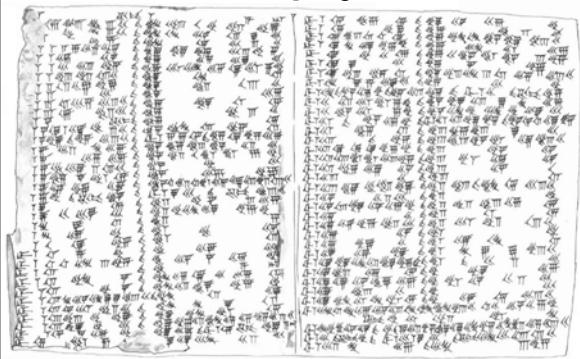
Tablettes scolaires mathématiques

- Uruk 16
- Sippar 21
- Kish 65
- Ur 72
- Mari 116
- Nippur 998

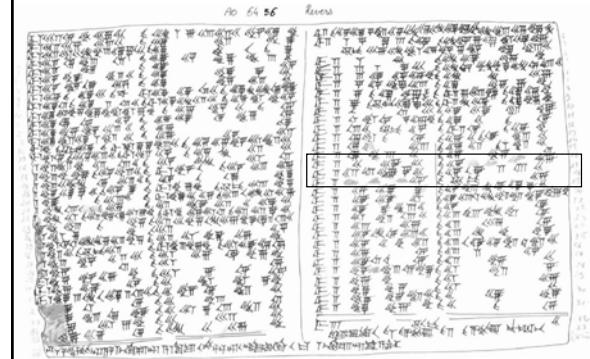
Prve analiza tablice AO6456

- Thureau-Dangin, F., 1922. *Tablettes d'Uruk à l'usage des prêtres du temple d'Anu au temps des Séleucides* (Textes cunéiformes du Louvre, 6), Paris; Geuthner.
- Cazalas G., Le calcul de la Table Mathématique AO 6456, *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* 29 (1932), 183–187.
- Colonel Allotte de la Fuye, La Table Mathématique AO 6456, *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* 29 (1932), 12–19.

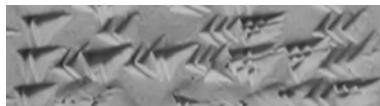
Ručna transkripcija – AO6456



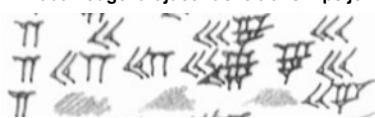
Ručna transkripcija – stražnja str.



Izvadak tablice – stražnja strana red 16-18, treći stupac



Izvadak odgovarajuće ručne transkripcije



Brojevni sustav Babilonaca

- Pozicioni brojevni sustav baze 60, tzv. **seksagezimalni** sustav
- Znamenke 1-59
- Međutim,
 - nemaju nulu, ... javlja se tek u ovoj modernoj fazi
 - nije definirana absolutna skala, tj. ne postoji oznaka decimalne točke, već pišu isključivo frakcije baze 60^N sa proizvoljnom potencijom baze
- FLOATING POINT GURUS ☺

Brojevni sustav Babilonaca

- Dakle broj
20 59 13 predstavlja:

$$20 \cdot 60^{(N+2)} + 59 \cdot 60^{(N+1)} + 13 \cdot 60^{(N+0)}$$

Ako odaberemo $N=0$ dobivamo cijeli broj:
75553

Ako odaberemo $N=-3$ dobivamo frakciju:
0.34978240740741

Način zapisa znamenki

- Koriste klinasto pismo
(engl. Cuneiform script)
- Sve znamenke 1-59 zapisane su kombinacijom dva osnovna simbola:
 - za jedan i za deset: Y i $<$,
 - jednostavnim ponavljanjem
- Prvo se pišu desetice, a onda jedinice
- Ponovljeni simboli se spajaju u jednu formu (radi razdvajanja znamenki)

Primjer pisanja znamenki

Znamenke

Jedinice

Desetice

- Primjer dvoznamenkastog broja **2 15**
- Interpretira se kao $2 \cdot 60 + 15 = 135$,
 - ali i kao $2 + 15/60 = 2.25$
 - ili $2/60 + 15/3600 = 0.0375$

Primjer pisanja znamenki

τ	1	π	2	ππ	3	ππ	4
π	5	ππ	6	ππ	7	ππ	8
ππ	9	<	10	<	11	<π	12
πππ	13	<π	14	<ππ	15	<ππ	16
ππππ	17	<ππ	18	<ππ	19	<	20
πππππ	30	<	40	<	50	τ	60

- Imali su i simbole za često korištene razlomke

Nazivi znamenaka

Number	Sumerian	Akkadian			
1	diš, aš	išten			
2	min	šma	11	u-diš (?)	ištenšeret
3	eš	šalaš	13		šalašer
4	limmnn	erbe	17		sebešer
5	ia	hamiš	20	niš	ešra
6	aš	šediš	30	ušu	šalaša
7	immin	šebe	40	nimin	erba
8	ussu	samane	50	nunu	hamša
9	ilimmnn	tise	60	giš, geš	susi
10	u	ešer	100	gešu	me'at
			600	nerum	
			1000	lim	limum
			3600	šar	šarum

Interpretacija primjera sa AO6456



 2 20 37 30 = $((30/60+37)/60+20)/60+2=2.34375$

 2 22 22 58 7 30 = $((((30/60+7)/60+58)/60+22)/60+22)/60+2=2.373046875$

 2 24 = $24/60+2=2.4$

Nađimo recipročnu vrijednost ovih brojeva

Uzmimo prvi broj iz primjera 2 20 37 30
 Koliko je recipročna vrijednost od 2.34375?
 mi znamo da iznosi ... 0.4266666666666666*
 a u seksagezimalnom sustavu ona iznosi:
25 36, jer je:
 $(36/60+25)/60 = 0.4266666666666666^*$
 Pa stari Babilonci pišu da je umnožak brojeva:
2 20 37 30 i **25 36** jednak jedinici, tj. jedan su drugom recipročni.

Nađimo recipročnu vrijednost ovih brojeva

Pogledajmo slijedeći broj iz tablice:
2 22 22 58 7 30 = 2.373046875
 recipr. vrijednost iznosi ... 0.42139917695473
 a u seksagezimalnom sustavu ona iznosi:
25 17 2 13 20, jer je:
 $((((20/60+13)/60+2)/60+17)/60+25)/60 = 0.42139917695473$
 Dakle opet pišemo da je umnožak brojeva:
2 22 22 58 7 30 i **25 17 2 13 20** jednak jedinici, a
 uočimo kako oba imaju **konačan prikaz**

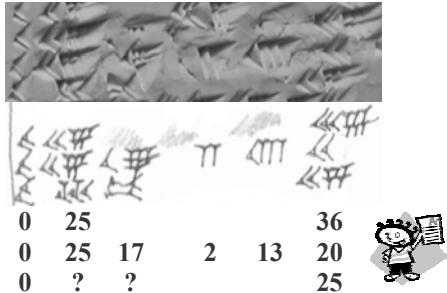
Nađimo recipročnu vrijednost ovih brojeva

Pogledajmo konačno i zadnji primjer:
2 24 = 2.4
 recipr. vrijednost iznosi ... 0.4166666666666666*
 odnosno u seksagezimalnom sustavu:
25, jer je:
 $25/60 = 0.4166666666666666^*$
 Dakle pišemo da je umnožak brojeva:
2 24 i **25** jednak jedinici
 Opet, za razliku od dekadskog sustava, oba broja u
 seksagezimalnom prikazu imaju konačan broj
 znamenki

Što su uistinu dobili Babilonci ?

- Da li su i oni došli do istog rezultata, ...
- pogledajmo što piše u četvrtom stupcu pločice u odgovarajućim recima (16-18), dakle desno od tri promatrana broja

Izvadak tablice – stražnja strana red 16-18, četvrti stupac



Zašto im je trebala takva tablica ?

- Babilonci nisu znali dijeliti brojeve
- ... jedini način dijeljenja je bio množenje sa recipročnom vrijednosti
- Kako naći recipročnu vrijednost ?
 - primjenom tablice
- Međutim samo neki brojevi imaju recipročnu vrijednost sa konačnim prikazom u seksagezimalnom sustavu

Regularni seksagezimalni brojevi

- Takve brojeve zvali su **regularnim**
- npr. 30 je recipročno od 2, jer jedan sat ima 2 puta po 30 minuta, odnosno dva puta po pola sata,
 - dakle broj 30 je istovremeno i cijeli broj 30 i frakcija baze 60 koja iznosi jednu polovinu
- slično 15 je recipročno od 4, jer jedna četvrtina sata traje 15 minuta
 - dakle broj 15 predstavlja i jednu četvrtinu

Zadaća tablice AO 6456

- Popisati što veći broj seksagezimalnih regularnih brojeva u rasponu od 1 do 3
- Naravno, sa pripadnom recipročnom vrijednosti
- Prilikom dijeljenja dovoljno je "konzultirati" tablicu i provjeriti da li traženi broj uopće ima konačnu recipročnu vrijednost
- Ako ima, pročitaj je iz tablice, a dijeljenje ostvareno množenjem biti će "savršeno" točno

Tablica recipročnih vrijednosti

- Potražimo sve parove regularnih brojeva
- *igi-n-ga'l-bi 1/n*
- ovi parovi se uobičajeno nazivaju
 - *igum* i *igibum*
- mi bi rekli x i $1/x$
- uzmišmo samo jednoznamenkesti *igum*, te dobivamo

001	1	-	1
002	2	-	30
003	3	-	20
004	4	-	15
005	5	-	12
006	6	-	10
007	7	-	8:30
008	9	-	6:40
009	10	-	6
010	12	-	5
011	15	-	4
012	16	-	3:45
013	18	-	3:20
014	20	-	3
015	24	-	2:30
016	25	-	2:24
017	27	-	2:13:20
018	30	-	2
019	32	-	1:52:30
020	36	-	1:40
021	40	-	1:30
022	45	-	1:20
023	48	-	1:15
024	50	-	1:12
025	54	-	1:06:40

Tablica recipročnih vrijednosti

- Neki parovi se ponavljaju jer je $1/2 = 30$
- kao i: $1/30=2$
- Radi toga, tablica se često piše u skraćenoj formi:

001	1	-	1
002	1:06:40	-	54
003	1:12	-	50
004	1:15	-	48
005	1:20	-	45
006	1:30	-	40
007	1:40	-	36
008	1:52:30	-	32
009	2	-	30
010	2:13:20	-	27
011	2:24	-	25
012	2:30	-	24
013	3	-	20
014	3:20	-	18
015	3:45	-	16
016	4	-	15
017	5	-	12
018	6	-	10
019	6:40	-	9
020	7:30	-	8

Svi parovi uz dvoznamenkasti *igum*

002	1:02130	- 57:36	038	2:14	- 22:13:20
003	1:04	- 56:15	039	2:14:40	- 21:12
004	1:05	- 54	040	2:14:45	- 21:20
005	1:07:30	- 53:20	041	2:15:24	- 20:19
006	1:09:07:12	- 52:05	042	2:15:45:40	- 20:15
007	1:10:18:45	- 51:12	043	3	- 20
008	1:11:2	- 50	044	3:07:30	- 19:12
009	1:14:04:26:40	- 48:36	045	3:12	- 18:145
010	1:15:1	- 48	046	3:20	- 18
011	1:17:20	- 45	047	3:24:56:15	- 17:04
012	1:21	- 44:26:40	048	3:36	- 16:140
013	1:23:20	- 43:12	049	3:42:13:20	- 16:12
014	1:24:22:30	- 42:40	050	3:45	- 16
015	1:26:24	- 41:40	051	4	- 15
016	1:28:05:53:20	- 40:30	052	4:03	- 14:49:53:20
017	1:30	- 40	053	4:10	- 14:49
018	1:33:45	- 38:24	054	4:16	- 14:03:45
019	1:35:20	- 37:30	055	4:26:40	- 13:30
020	1:38:45:55:33:20	- 36:27	056	4:30	- 13:20
021	1:40	- 36	057	4:41:15	- 12:148
022	1:42:28:07:30	- 35:08	058	4:48	- 12:30
023	1:44:40	- 33:45	059	4:56:17:46:40	- 12:09
024	1:48	- 33:20	060	5	- 12
025	1:50:04:40	- 32:24	061	5:20	- 11:15
026	1:52:130	- 32	062	5:24	- 11:14:40
027	1:55:12	- 31:15	063	5:33:20	- 10:48
028	1:57:20	- 30	064	5:37:30	- 10:40
029	2:05	- 28:48	065	5:45:36	- 10:25
030	2:08	- 28:07:30	066	6	- 10
031	2:10:20	- 27	067	6:15	- 9:36
032	2:15	- 26:40	068	6:24	- 9:22:30
033	2:20:37:30	- 25:36	069	6:40	- 8:53:20
034	2:23:20	- 25	070	6:45	- 8:32
035	2:28:08:53:20	- 24:18	072	7:12	- 8:20
036	2:30	-	073	7:24:26:40	- 8:06
037	2:40	- 22:30	074	7:30	- 8

Broj unikatnih regularnih parova

#znamenaka <i>igum</i>	# parova <i>igum- igibum</i>	max dužina <i>igibum</i> (#znam.)
1	20	3
2	74	6
3	167	7

Zadaća tablice AO 6456

- U tablici AO 6456 su popisane recipročne vrijednosti za *igum* u rasponu od 1 do 3
- Pri tome, se razmatraju samo regularni *igumi* sa najviše do 5 seksagezimalnih znamenki iza nepostojeće decimalne točke
- Dakle oblika:
 - U VV WW XX YY ZZ
 - gdje je U=1, ili 2

Točnost *iguma* sa 5 seksimala

- Svaka seksagezimalna znamenka je po svojoj "težini" ekvivalentna 1.78 dekadskih znamenki,
– jer je $\log_{10}(60)=1.78$
- Dakle 5 znamenaka u seksagezimalnom sustavu je ekvivalentno 9 dekadskih znamenki

Očekivani broj recipročnih parova

- Koliko ima regularnih *iguma* u navedenom rasponu i kako ih naći?
- Svi navedeni regularni *igumi* u cijelobrojnom prikazu moraju zadovoljavati slijedeće svojstvo:
– da su im jedini prim faktori: 2, 3, ili 5
- Dakle moraju biti oblika:
– $igum = 2^i * 3^j * 5^k$, gdje su $i,j,k \in \mathbb{N}_0$

Očekivani broj recipročnih parova

- Koliko su uspješni bili Babilonci u popisivanju svih regularnih parova?
- Od ukupno 232 unikatna para u tablici ih je navedeno 137
- Preostalih 95 im je ili promaklo, ili nije stalo na ionako izuzetno veliku tablicu
- Vidi se da su imali problem sa prostorom, jer se ponekad čak i dva para nalaze u retku predviđenom za samo jedan par!

Popis svih parova 1/8

001	1	60
002	1:16:16.53:53:20	59:43:10:50:52:48
003	1:00:40:53:20	59:19:34:13:10:7:30
004	1:00:45	59:15:33:20
005	1:01:02:13:01:34:15	58:58:16:38:24
006	1:01:02:13:01:34:15	58:58:16:38:24
007	1:01:30:33:15	58:31:39:35:18:31:06:40
008	1:01:43:42:13:20	58:19:12
009	1:02:08:16:12:48	
010	1:02:12:28:14:20	57:52:13:20
011	1:02:12:28:14:20	57:36
012	1:02:59:08:09:13:26	
013	1:03:12:35:13:20:10	56:57:11:15
014	1:03:16:53:20	56:53:20
015	1:04:04:43:36:53:20	56:15
016	1:04:48	55:33:20
017	1:05:06:15	55:17:45:36
018	1:05:03:02:09:13:26	54:55:53:54:22:30
019	1:05:04:11:15:20	54:52:10:51:51:06:40
020	1:05:04:11:15:20	54:36:48
021	1:06:21:18:15:20	
022	1:06:21:18:15:20	
023	1:06:25:48:27	54:11:32:12:41:35:28:23:42
024	1:06:40	
025	1:07:00:33:20	
026	1:07:49:09:37:30	
027	1:08:16	52:44:03:45:34
028	1:08:20:37:30	52:40:29:37:46:40
029	1:09:07:12	52:05
030	1:09:07:12	

100

Popis svih parova 2/8

031	1:09:59:41;18:14:24	-	02
032	1:09:59:18:02:24	-	02
033	1:10:18:02:24	51:12	02
034	1:10:15;31:31:40:48	-	02
035	1:11:06;16:40	60:37:30	02
036	1:11:06;12:49:03:45	50:34:04:16:26:40	02
037	1:12:01:49:03:45	50	02
038	1:12:10;26:16:40	-	02
039	1:12:14;9:04:09	49:26:18:30:56:15	02
040	1:12:15;18:04:09	49:22:45:16:40	02
041	1:13:01:13;31:52:30	49:41:07:22	01
042	1:13:13;43:40:30	48:49:41:15	01
043	1:13:48:40:30:30	48:46:22:59:25:25:55:33:19	01
044	1:14:04;26:40:40	48:36	01
045	1:14:18;58:33:16	48:35	01
046	1:15:01:49:03:45	48	01
047	1:15:21;20:17:21:40	-	01
048	1:15:51:16:06:40	47:27:39:22:30	01
049	1:15:55:61:15	47:24:26:40	01
050	1:16:01:15:15:15	47:24:26:40	01
051	1:16:13;32:11:11:15	46:49:19:40:14:14:48:53:20	01
052	1:17:09;39:37:46:40	46:39:21:31	01
053	1:17:14;20:02:16	46:20:54:15:13:30:14:03:45	01
054	1:18:04:14:52:30	-	01
055	1:18:10:45:31:12	46:04:14:48	01
056	1:18:18;35:31:12:12	-	01
057	1:18:18;43:55:12	45:43:29:03:12:35:33:20	01
058	1:19:00;44:26:40	45:13:34:5	01
059	1:19:06:05:37:30	-	01

Popis svih parova 3/8

061	1:20		-45	046
062	1:20:54;31:06:40	-44	44+29:30+39:50:37:30	047
063	1:21	-44	44+26:40	048
064	1:21:22:48:45	-44	44+14:12:28:48	049
065	1:21:25:55:12	-43	43+56:43+07:30	050
066	1:22:00:45	-43	43+53:44+1:28:53:20	051
067	1:22:27:45:37:04	-43	43+53:44+1:28:53:20	052
068	1:22:56:39:24	-43	43+24:10	053
069	1:23:02:15:15:45	-43	43+15	054
070	1:23:20:23	-43	43+12	055
071	1:23:58:50:52:48	-42	42+52:00+59:15:33:20	056
072	1:24:22:23:30	-42	42+40	057
073	1:24:45:22:45	-42	42+11:15	058
074	1:25:25:46:52:30	-42	42+08:23:42:13:20	059
075	1:26:24:24	-41	41+40	060
076	1:26:48:20	-41	41+28:19:12	061
077	1:27:25:52:48	-41	41+25:52:48	062
078	1:27:28:48	-41	41+10:08:08:53:20	063
079	1:28:15:25:57	-40	40+15:25:57	064
080	1:28:28:25:57:36	-40	40+14:22:23:30	065
081	1:28:34:24:36	-40	40+14:22:23:30	066
082	1:28:53:20	-40	40+30	067
083	1:29:40:50:24:27	-40	40+08:32:44:57:28:29:55:20	068
084	1:30:15:25:50	-40	40+15:25:50	069
085	1:30:25:20:50:50	-40	40+15:25:50	070
086	1:31:01:20	-39	39+13:01:20	071
087	1:31:07:30	-39	39+30:22:13:20	072
088	1:32:09:36	-39	39+03:45	073
089	1:32:15:50:37:30	-39	39+01:06:23:32:20+44:26:39	074
090	1:32:35:33:20	-38	38+54:28	075

100

Popis svih parova 4/8

Popis svih parova 5/8

121	1:46:140	- 33:45	087
122	1:48	- 33:20	088
123	1:49:30:25	- 33:10:39:21:36	089
124	1:49:13:13:36	- 32:57:32:20:37:30	090
125	1:49:21:2	- 32:55:18:31:06:40	091
126	1:49:51:47:48:45	- 32:24:10:00:00:00	092
127	1:50:11:33:12	- 32:23:07:30	093
128	1:51:03:43:45	- 32:30:55:19:36:57:17:02:13	093
129	1:51:06:40:49	- 32:24	094
130	1:51:58:27:50:12:4	- 32:14:00:00:00:00:00	094
131	1:52:30	- 32	095
132	1:53:01:41:02:30	- 31:36:00:00:00:00:08:03:35	095
133	1:53:46:40	- 31:36:12:16:15	096
134	1:53:46:40:30	- 31:36:17:46:40	097
135	1:55:12	- 31:15	098
136	1:55:44:26:40	- 31:06:14:24	099
137	1:56:30:30:24	- 30:55:59:24:00:00:22:59	100
138	1:56:38:24	- 30:51:51:06:40	100
139	1:57:01:24	- 30:43:12	101
140	1:57:57:13:16:48	- 30:31:03:16:52:30	102
141	1:58:05:52:48	- 30:22:30	103
142	1:58:31:06:48	- 30:22:30	103
143	1:58:39:08:26:15	- 30:20:26:40	104
144	1:59:34:27:12:15	- 30:06:24:33:03:06:22:06	105
145	1:59:34:27:12:15	- 30	105
146	2:00:33:47:46:40	- 29:57:31:06:33:45	106
147	2:01:21:46:40	- 29:33:47:06:33:45	106
148	2:01:30	- 29:37:46:40	106
149	2:02:04:13:07:30	- 29:29:28:10:00	106
150	2:02:52:48	- 29:17:45:45	106

Popis svih parova 6/8

151	2:03:03:07:30	-	29:15:49:47:39:15:33:20	107
152	2:03:27:24:45:26	-	29:09:03:16:20:30:30:22:11:20	108
153	2:04:16:32:25:36	-	28:56:06:40:30:30:30:22:11:20	109
154	2:04:24:41:57:36	-	28:56:06:40:30:30:30:22:11:20	110
155	2:05:	-	28:48	110
156	2:05:58:19:19:12	-	28:44:00:39:30:22:11:20	111
157	2:06:25:11:06:40	-	28:44:00:39:30:22:11:20	111
158	2:06:33:44:45	-	28:26:40	112
159	2:08:	-	28:07:30	112
160	2:08:08:40:18:45	-	27:48:32:54:54:09:26:11:20	113
161	2:09:27:13:46:40	-	27:48:32:54:54:09:26:11:20	113
162	2:09:31:	-	27:46:40	113
163	2:09:50:12:30	-	27:38:52:48	114
164	2:10:11:39:12	-	27:38:52:48	114
165	2:11:13:30:45	-	27:06:05:25:35:33:20	115
166	2:11:50:09:22:30	-	27:18:00	115
167	2:12:42:37:26:24	-	27:07:36:11	115
168	2:12:51:36:54	-	27:00:00:00:00:00:47:14:11:20	115
169	2:13:00:36:54	-	26:40	116
170	2:13:01:36:54	-	26:40	116
171	2:15:38:01:15	-	26:00:00:00:00:00:16:14:20	116
172	2:16:31:32	-	26:00:00:00:00:00:16:14:20	117
173	2:16:41:41:55	-	26:20:14:48:53:20	117
174	2:18:14:24:24	-	26:00:21:48:53:20	118
175	2:18:45:45:56:15	-	25:55:12:48:53:20	119
176	2:18:53:20	-	25:55:12:48:53:20	119
177	2:19:48:36:28:48	-	25:36:00:00:00:00:16:14:20	119
178	2:19:58:04:48	-	25:33:12:35:33:20	120
179	2:20:37:30	-	25:36	120
180	2:21:43:03:21:36	-	25:36	120

Popis svih parova 7/8

181	2:22:13:20	- 25:17:02:13:20	
182	2:22:22:58:07:30	- 25:17:02:13:20 25	121
183	2:24:40:33:20	- 25:17:02:13:20	122
184	2:25:38:08	- 24:43:09:15:28:07:30	123
185	2:25:48	- 24:43:20:51:28	
186	2:25:48	- 24:43:20:51:28	
187	2:26:29:01:45	- 24:34:33:34	
188	2:26:31:21:36	- 24:34:33:34	
189	2:27:37:21	- 24:23:11:29:42:42:57:46:39	124
190	2:28:08:53:20	- 24:18	125
191	2:29:17:57:07:12	- 24:06:45:33:12	
192	2:29:28:04:00:45	- 24:06:45:33:12	
193	2:30:42:14:43:20	- 24:06:45:33:12	
194	2:30:42:14:43:20	- 24:06:45:33:12	
195	2:31:42:13:20	- 23:43:49:41:15	126
196	2:31:52:30	- 23:43:49:41:15	
197	2:31:52:30	- 23:26:15	127
198	2:33:16:24:23:30	- 23:19:40:48	
199	2:34:19:15:33:20	- 23:19:40:48	128
200	2:35:20:40:32	- 23:10:27:25:45:07:01:52:30	129
201	2:35:31:12	- 23:08:53:20	
202	2:35:31:12	- 23:02:24	130
203	2:37:17:11:02:24	- 22:51:44:31:36:17:40:15	
204	2:37:27:50:24	- 22:51:44:31:36:17:40:15	
205	2:38:01:28:53:20	- 22:46:52:30	
206	2:38:01:28:53:20	- 22:45:20	131
207	2:39:25:56:16:48	- 22:45:20	
208	2:40	- 22:45:20	
209	2:41:49:02:13:20	- 22:45:20	
210	2:42	- 22:13:20	

Popis svih parova 8/8

211	2:42:45:37:30	- 22:07:06:14:24	
212	2:43:50:24	- 22:08:21:33:45	
213	2:43:50:24	- 22:08:21:33:45	
214	2:45:42:03:14:08	- 22:43:33:20:46:05	
215	2:45:53:16:48	- 22:42:05	132
216	2:46:04:31:07:30	- 22:40:13:51:04:39:14:20:29	
217	2:47:47:41:45:36	- 22:13:6	133
218	2:48:45	- 22:20	
219	2:49:32:31:33:45	- 22:34:01:11:20:20:05	
220	2:50:40	- 22:05:37:05	
221	2:50:40	- 22:05:37:05	
222	2:51:51:33:45	- 22:34:11:11:06:05	
223	2:52:40	- 22:05:37:05	
224	2:53:36:40	- 20:44:03:05:05	
225	2:54:45:45:36	- 20:35:57:42:53:20:05	
226	2:54:57:36	- 20:34:34:04:20:05	
227	2:54:57:36	- 20:28:14:08:05	135
228	2:55:08:19:55:12	- 20:12:19:34:45:01:01:01:01	
229	2:57:08:49:12	- 20:12:19:34:45:01:01:01:01	
230	2:57:46:40	- 20:15	136
231	2:59:21:40:54	- 20:04:16:22:20:04:16:57:04	
232	3	- 20	137

Rad koji provodi sličnu analizu

- vidi link:
- www-dapnia.cea.fr/Phocea/file.php?class=std&file=Seminaires/1421/t1421_1.pdf
- "Calculer en base 60 il y a 4000 ans en Mésopotamie"

Christine Proust

Equipe REHSEIS

ENS - Site «!CultureMATH!»

Recipročne vrijednosti složenijih regularnih brojeva

- Što napraviti kada je potrebno odrediti recipročnu vrijednost broja koji nije u raspoloživoj tablici ?
 - npr. imamo samo tablicu sa 20 osnovnih parova jednoznamenastih iguma?
- Babilonci koriste postupak inverzije kojim se problem svodi na dvije jednostavnije (tablične) inverzije i dva množenja!
- Poznat je pod nazivom "Tehnika"

Popis svih 232 iguma (*=fali)

1	1:13:13:52:30	- 1:28:24:57:36	* 2:25:11:6:40
1:0:56:53:20	1:13:40:49:30	- 1:28:24:57:36	* 2:33:35
1:0:56:53:20	1:13:40:49:30	- 1:28:24:57:36	* 2:33:36
1:12:63:45	1:14:26:49:30	- 1:29:40:50:24:27	* 2:27:13:45
1:12:63:45	1:14:26:49:30	- 1:29:40:50:24:27	* 2:27:13:46
1:13:30:45	1:15:21:49:33:36	- 1:30:25:20:50	* 2:35:20:40:32
1:13:30:45	1:15:21:49:33:36	- 1:30:25:20:50	* 2:35:20:43
1:14:42:13:20	1:16:21:47:21:40	- 1:31:7:30	* 2:11:19:12
1:14:42:13:20	1:16:21:47:21:40	- 1:31:7:30	* 2:11:19:13
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:36:15
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:37:27:11:24
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:37:27:50:24
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:1:25:53:20
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:1:25:54
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:48
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:48:48
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:48:49
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:49
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:50
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:51
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:52
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:53
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:54
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:55
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:56
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:57
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:58
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:59
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:60
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:61
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:62
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:63
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:64
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:65
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:66
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:67
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:68
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:69
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:70
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:71
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:72
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:73
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:74
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:75
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:76
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:77
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:78
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:79
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:80
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:81
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:82
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:83
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:84
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:85
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:86
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:87
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:88
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:89
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:90
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:91
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:92
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:93
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:94
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:95
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:96
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:97
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:98
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:99
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:100
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:101
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:102
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:103
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:104
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:105
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:106
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:107
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:108
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:109
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:110
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:111
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:112
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:113
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:114
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:115
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:116
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:117
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:118
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:119
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:120
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32:30:36	* 2:38:25:56:49:121
1:15:55:16:48	1:15:55:16:48	- 1:32	

“Tehnika”

- Transkripcija VAT6505 koja opisuje “Tehniku”:
 - 2 13 20.** Koja mu je recipročna vrijednost?
 - Ti, u svom postupku
 - nađi recipročnu vrijednost od **3 20**. Ti vidiš **18**.
 - Pomnoži **18** sa **2 10**. Ti vidiš **39**.
 - Dodaj **1**. Ti vidiš **40**.
 - Nađi recipročnu vrijednost od **40**. Ti vidiš **1 30**.
 - Pomnoži **1 30** sa **18**.
 - Ti vidiš **27**. **27** je njegova recipročna vrijednost
 - Takav je postupak.

“Tehnika”

- Princip korišten u “Tehnici”:

- Odredimo $n=1/n$
- Rastavi $n=a+b$
- Nađi (iz tablice) inverz od $b \dots bi$
- Pomnoži n sa bi u dva koraka:
 - $c=a^*bi$
 - $d=n^*bi=c+1$
- Nađi (iz tablice) inverz od $d \dots di$
- Pomnoži bi^*di
- Rezultat je $bi^*di=bi^*(1/(bi^*n))=1/n=ni$

$$ni = \frac{1}{n} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a \cdot \frac{1}{b} + 1} = bi \cdot \frac{1}{a \cdot bi + 1} = bi \cdot \frac{1}{d} = bi \cdot di$$

“Tehnika”

- Ilustracija na primjeru $n=2 5$ (dvije znamenke!)
- Odredimo $n=1/n$
- Rastavi $n=a+b$
 - $a=2$ (na višem mjestu)
 - $b=5$ (na nižem mjestu)
- Nađi (iz tablice) inverz od $b=5 \dots bi=12$
- Pomnoži n sa bi u dva koraka:
 - $c=a^*bi=2^*12=24$
 - $d=n^*bi=c+1=25$
- Nađi (iz tablice) inverz od $d=25 \dots di=2 24$
- Pomnoži $bi^*di=12 * 2 24=28 48$
- Dakle, rezultat je $1/n=ni=bi^*di=28 48$

“Tehnika”

- Da li uvijek radi?
 - ... nužna pretpostavka je da oba broja: b i d imaju tablični inverz!
 - za broj b to se može osigurati pogodnim rastavom broja n , ali
 - za pomoći broj d nema garancije da se uvijek radi o regularnom broju s tabličnim inverzom!
- Dakle ponekad “Tehnikom” nije moguće naći recipročnu vrijednost.

Specifičnosti korištenja nule na tablici AO6456

- Za razliku od staro-babilonskih zapisa koji nisu koristili nulu, u tablici AO6456 ona se koristi unutar broja na mjestima znamenki koje su jednake nuli.
- To je novost uvedena u Seleukidnom razdoblju
- Simbol za nulu izgleda kao dvije desetke koje se šire gore desno, tako da im se gornja noga poklapa:



Specifičnosti korištenja nule na tablici AO6456

- Nula se koristi i ispred recipročnog broja u obliku $0.XX YY ZZ \dots$, kao delimiter iguma i igibuma, a obično je potpisana iz reda u red.
- Ponekad se koristi i ispred znamenke jedan, naizgled bez razloga i pravila, što će biti pokazano na primjerima

Specifičnosti korištenja devetke

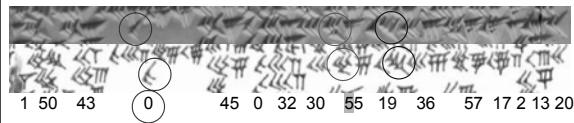
- Koristi se i posebni simbol za znamenku devet
 - umjesto 9 stupića (jedinica) organiziranih u matricu 3×3 koristi se:
 - simbol od 3 desetke koje se šire prema dolje desno, tako da im se donja noga preklapa



- npr. 2 9 36

29

Pravilno korištenje nule i devetke – 23. red prvi i drugi stupac



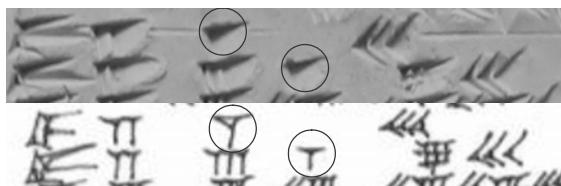
igum treba biti:
1 50 43 00 45

a pripadni *igibum*:

Uoči pogrešku u transkripciji broja 55 označenu zelenom bojom
(na stvarnoj pločici je pravilni zapis!)

Uoči i specijalni simbol za broj 9 (označen plavom bojom)

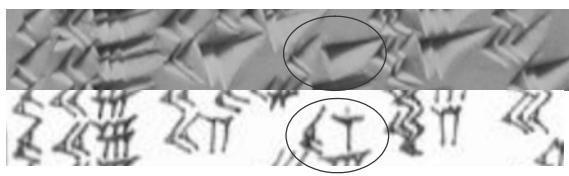
Uobičajeno korištenje jedinice – 4. i 5. red treći stupac (stražnja strana)



2 1 30
2 3 1 7 30

Očekivani vrijednost *iguma*:

“Nepotrebno” korištenje nule uz jedinicu – 14. red četvrti stupac



igibum treba biti 26 22 01 52 30, ali zbog nule može biti čitano i kao: 26 22 00 01 52 30? Zašto uopće piše nulu?

“Nepotrebitno” korištenje nule uz jedinicu – 25. red četvrti stupac

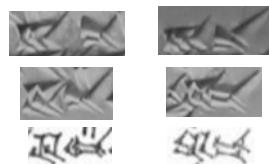


Treba biti **23 10 27 25 52 01 52 30**, ali može se čitati i kao:
23 10 27 25 52 00 01 52 30?

Međutim, ovdje je nula jako bliska jedinici pa je manja vjerojatnost pogrešne interpretacije

Drugi simboli

- Povremeno kod jednostavnih brojeva sa malo znamenaka koriste se i specijalni simboli koji se ubacuju u zapis broja, ali
 - ... ne poznamo njihovo značenje ☺



Pogreške u tablici i transkripciji

- **Uslijed:**
 - očitih pogrešaka pisara, koji je ovu tablicu vjerojatno izrađivao prepisivanjem iste takve, ali bez detaljne provjere i razumijevanja ☺
 - nejasno napisanih znamenki koje se mogu interpretirati na razne načine
 - uslijed neprecizno provedene transkripcije koja je rađena početkom prošlog stoljeća

Primjeri pogrešaka pisara

- Prilikom ručne provjere sadržaja zadnje četvrte tablice utvrđeno je da su na dva mesta ispuštene cijele znamenke
- npr. umjesto $igibum=26\ 20\ 14\ 48\ 53\ 20$
- u tablici piše $26\ 20\ 38\ 53\ 20$
- umjesto $igibum= 23\ 10\ 27\ 25\ 45\ 07\ 01\ 52\ 30$
- u tablici piše $23\ 10\ 27\ 25\ 52\ 01\ 52\ 30$
- Uočite da ovo nisu obični tipfeleri ili pogreške u transkripciji

Pogreške u tablici i transkripciji

- Usporedbom transkripcije i očekivanog sadržaja, na parovima brojeva koji se nalaze u desnom dijelu stražnje strane tablice, od ukupno 32 analizirana para, pogreške postoje u barem 8 brojeva.
- U pola slučaja to su sigurno pogreške pisara, a u preostaloj polovici to su pogreške interpretacije i transkripcije

Broj znamenaka i točnost *igibuma*

- Kod nekih parova *igibum* je zapisan sa čak 10 seksagezimalnih znamenaka, npr.
- $igum = 1\ 50\ 43\ 00\ 45$
- $igibum = 32\ 30\ 55\ 19\ 36\ 57\ 17\ 02\ 13\ 20$
- To je ekvivalentna dekadska točnost od 18 točnih znamenki
- Napomenimo da ih double-float ima manje od 16, što ukazuje na izvanrednu sofisticiranost ovih ranih matematičara

“Aplikacija” ovakve tablice

- Točnost zapisa korištena u ovoj tablici sigurno nije bila nužna u svakodnevnoj upotrebi (za kruh i mlijeko, ☺)
- Vjerojatno je ključna primjena bila u astronomiji
- Jedna od omiljenih aktivnosti tadašnjih matematičara i astronoma je bila predikcija pomrčina sunca i mjeseca.



