Završni ispit iz Linearne algebre

7. srpnja 2009.

1. [**2 boda**] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

i vektor $b = (2,4)^\top$, s elementima iz polja $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Riješite jednadžbu $Ax = b$.

2. [**5 bodova**] Zadan je skup X svih matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a-2b \\ a+3c & a-c \end{bmatrix}$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) (1 bod) Pokažite da je X vektorski potprostor prostora $M_{2,2}$ svih matrica s realnim koeficijentima.

(b) (2 boda) Navedite definiciju baze općeg vektorskog prostora X. Dokažite da je rastav vektora $x \in X$ po bazi određen jednoznačno.

(c) (2 boda) Za vektorski prostor X iz (a) odredite neku bazu i izračunajte njegovu dimenziju.

3. [**4 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon P_2 \to M_{2,2}$ sa

$$A(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 - a_2 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 boda) Odredite matricu tog linearnog operatora u paru kanonskih baza od P_2 i $M_{2,2}$.

(b) (2 boda) Odredite rang i defekt tog linearnog operatora.

4. [**2 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

u kanonskoj bazi. Odredite matricu istog operatora u bazi $\{(1,2)^\top, (-1,3)^\top\}$.

5. [**2 boda**] Na skupu $M_{2,2}$ svih matrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, zadana je norma $\|A\| = |a| + |b| + |c| + |d|$.

Okrenite!

(a) (1 bod) Dokažite da je to zaista norma.

(b) (1 bod) Nađite udaljenost matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ u toj normi.

6. [**5 bodova**] (a) (3 boda) Definirajte stabilnu kvadratnu matricu i dokažite da je kvadratna matrica A stabilna ako i samo ako vrijedi $e^{At} \to 0$ kada $t \to \infty$.

   (b) (2 boda) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da za matricu

$$A = \begin{bmatrix} -3 + 2a - 5i & a^2 + i \\ 0 & 1 - 2a - ai \end{bmatrix}$$

   vrijedi $e^{At} \to 0$ kada $t \to \infty$.

7. [**2 boda**] Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunajte njenu spektralnu normu $\|A\|_2 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$, gdje je $\|.\|_2$ euklidska norma, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

8. [**7 bodova**] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

   (a) (3 boda) Formulirajte i dokažite Geršgorinov teorem o krugovima.

   (b) (1 bod) Crtanjem Geršgorinovih krugova pokažite da se spektar navedene matrice nalazi lijevo od imaginarne osi.

   (c) (2 boda) Opišite Jacobijevu metodu općenito. Navedite teorem o nužnim i dovoljnim uvjetima za konvergenciju te metode.

   (d) (1 bod) Pokažite da za navedenu matricu Jacobijeva metoda za rješavanje jednadžbe $Ax = b$ konvergira za bilo koji $b \in \mathbb{R}^3$.

9. [**6 bodova**] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) (3 boda) Odredite skraćenu singularnu dekompoziciju te matrice.

   (b) (2 boda) Izračunajte pseudoinverz matrice A tako da najprije odredite skraćenu singularnu dekompoziciju matrice A^+.

   (c) (1 bod) Odredite $x \in \mathbb{R}^3$ tako da je za $b = (1, -2)^\top$ vrijednost $\|Ax - b\|_2$ minimalna.

10. [**5 bodova**] Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi $y_1' = -3y_2$, $y_2' = 3y_1 + 2$.

   (a) (1 bod) Napišite taj sustav u matričnom obliku.

   (b) (2 boda) Izračunajte e^{At}, gdje je A matrica tog sustava.

   (c) (2 boda) Riješite matrični sustav iz (a) uz početni uvjet $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, te uz pomoć tog rješenja napišite odgovarajuće rješenje sustava.