Završni ispit iz Linearne algebre

23. lipnja 2010.

1. [**2 boda**] Zadana je matrica
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$
i vektor $\mathbf{b} = (3,4)^\top$, s elementima iz polja $\mathbb{Z}_7$. Riješite jednadžbu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

2. [**5 bodova**] Zadan je skup X svih matrica oblika
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2a - b + c & a - 3b \\ a + b & b - c \end{bmatrix}$$
gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) (1 bod) Pokažite da je X vektorski podprostor prostora $M_{2,2}$ svih matrica s realnim koeficijentima.

   (b) (2 boda) Za vektorski prostor X odredite neku bazu i izračunajte njegovu dimenziju.

   (c) (2 boda) Neka je $U : X \to M_{2,2}$ linearni operator zadan sa $U(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ (tzv. operator ulaganja prostora X u $M_{2,2}$). Odredite njegov rang i defekt.

3. [**4 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon P_3 \to M_{2,2}$ sa
$$A(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 & a_3 - a_2 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2 boda) Odredite matricu tog linearnog operatora u paru kanonskih baza od P_3 i $M_{2,2}$.

   (b) (2 boda) Ispitajte je li taj operator izomorfizam. Prethodno definirati što to znači da je linearni operator $A : X \to Y$ izomorfizam.

4. [**2 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matricom
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
u kanonskoj bazi. Odredite matricu $\mathbf{A}'$ tog istog operatora u bazi koju čine vektori $\mathbf{e}_1 = (1,1)^\top$ i $\mathbf{e}_2 = (-1,1)^\top$.

5. [**2 boda**] Na vektorskom prostoru svih matrica
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},$$
gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, zadana je norma $\|\mathbf{A}\| = |a - b| + |b| + 9|c|$. (a) Dokažite da je to zaista norma.

   (b) Nađite udaljenost matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ u toj normi.

Okrenite!

6. **[2 boda]** Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4+2a-i & 0 \\ -a+3i & 2-4a+i \end{bmatrix}$$

vrijedi $e^{\mathbf{A}t} \to 0$ kada $t \to +\infty$.

7. **[5 bodova]** (a) (1 bod) Definirati spektralnu normu $\|\mathbf{A}\|_2$ kvadratne matrice $\mathbf{A}$.

   (b) (3 boda) Dokažite da za bilo koju kompleksnu kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ vrijedi $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{r(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}$, gdje je $r(\,\cdot\,)$ spektralni radius matrice.

   (b) (1 bod) Izračunajte spektralnu normu matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

8. **[7 bodova]** Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2 boda) Formulirajte Geršgorinov teorem o krugovima. Crtanjem Geršgorinovih krugova pokažite da se spektar navedene matrice nalazi lijevo od imaginarne osi.

   (b) (4 boda) Opišite Jacobijevu metodu za rješavanje općenitog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (1 bod). Dokažite teorem o nužnim i dovoljnim uvjetima za konvergenciju te metode (3 boda).

   (c) (1 bod) Pokažite da za navedenu matricu Jacobijeva metoda za rješavanje jednadžbe $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konvergira za bilo koji $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

9. **[6 bodova]** Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) (3 boda) Odredite skraćenu singularnu dekompoziciju te matrice.

   (b) (2 boda) Izračunajte pseudoinverz matrice $\mathbf{A}$ tako da najprije odredite skraćenu singularnu dekompoziciju matrice $\mathbf{A}^+$.

   (c) (1 bod) Rabeći (b) odredite $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tako da je za $\mathbf{b} = (2,3)^\top$ vrijednost $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ minimalna.

10. **[5 bodova]** Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi $\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$, gdje su $x_1 = x_1(t)$ i $x_2 = x_2(t)$ nepoznate funkcije.

    (a) (1 bod) Napišite taj sustav u matričnom obliku.

    (b) (2 boda) Izračunajte $e^{\mathbf{A}t}$, gdje je $\mathbf{A}$ matrica tog sustava.

    (c) (2 boda) Rabeći (b) riješite navedeni sustav diferencijalnih jednadžbi uz početni uvjet $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.