Završni ispit iz Linearne algebre

17. lipnja 2011.

1. [**2 boda**] Zadana je matrica
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
i vektor $\mathbf{b} = (2,1)^\top$, s elementima iz polja $\mathbb{Z}_5$. Riješite jednadžbu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

2. [**5 bodova**] Zadan je skup X svih matrica oblika
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a+2b & b-2c \end{bmatrix}$$
gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) (1 bod) Pokažite da je X vektorski podprostor prostora $M_{2,2}$ svih matrica s realnim koeficijentima.

   (b) (2 boda) Za vektorski prostor X odredite neku bazu i izračunajte njegovu dimenziju.

   (c) (2 boda) Neka je $U : X \to \mathbb{R}^4$ linearni operator zadan sa $U(\mathbf{A}) = (a+b, a+2b, a+3b, a+4b)$. Odredite njegov rang i defekt.

3. [**4 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon P_3 \to M_{2,2}$ sa
$$A(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{bmatrix} a_0 + 2a_1 & a_1 - a_2 \\ a_1 & a_3 - a_1 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2 boda) Odredite matricu tog linearnog operatora u paru kanonskih baza od P_3 i $M_{2,2}$.

   (b) (2 boda) Ispitajte je li taj operator izomorfizam. Prethodno definirati pojam izomorfizma.

4. [**2 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matricom
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
u kanonskoj bazi. Odredite matricu $\mathbf{A}'$ tog istog operatora u bazi koju čine vektori $\mathbf{e}_1 = (1,-1)^\top$ i $\mathbf{e}_2 = (1,2)^\top$.

5. [**2 boda**] Zadani su linearni operatori $A, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, sa $A(a,b,c) = (a+b, a-2c, a-3b, 2a+c)$ i $B(a,b,c) = A(c,a,b)$. Nađite udaljenost operatora A i B s obzirom na operatorsku ∞-normu.

6. [**3 boda**] Pokažite da red $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{A}^k$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$ konvergira i izračunajte njegovu sumu.

Okrenite!

7. **[2 boda]** Definirajte stabilnu matricu i odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (i-2)a - 3 & a^3 + 2i \\ 0 & 3a + 4 - i \end{bmatrix}$$

vrijedi $e^{\mathbf{A}t} \to 0$ kada $t \to +\infty$.

8. **[4 boda]** (a) (1 bod) Definirajte Geršgorinove krugove za matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda n.

(b) (2 boda) Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći Geršgorinov teorem o krugovima, odredite neki $c > 0$ takav da za spektralnu normu matrice $\mathbf{A}$ vrijedi $\|\mathbf{A}\|_2 \leq c$.

(b) (1 bod) Izračunajte $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{\mathbf{A}}{5}\right)^k$. Račun obrazložite!

9. **[3 boda]** Iskažite teorem o konvergenciji Jacobijeve metode i ispitajte konvergira li sustav $-2x_1 + 4x_2 = b_1$, $x_1 + 3x_2 = b_2$ za bilo koje $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Izračunajte odgovarajuću drugu iteraciju $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, ako je $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

10. **[6 bodova]** Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 boda) Odredite skraćenu singularnu dekompoziciju te matrice.

(b) (2 boda) Izračunajte pseudoinverz matrice $\mathbf{A}$ tako da najprije odredite skraćenu singularnu dekompoziciju matrice $\mathbf{A}^+$.

(c) (1 bod) Rabeći (b) odredite $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tako da je za $\mathbf{b} = (1, 1, -7)^\top$ vrijednost $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ minimalna.

11. **[7 bodova]** (a) (2 boda) Iskažite i dokažite teorem o rješenju nehomogenog Cauchyevog problema u $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Zadan je sustav diferencijalnih jednačaba $\dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2 + t$, $\dot{x}_2 = 2x_2 + 1$, gdje su $x_1 = x_1(t)$ i $x_2 = x_2(t)$ nepoznate funkcije.

(b) (1 bod) Napišite taj sustav u matričnom obliku.

(c) (2 boda) Izračunajte $e^{\mathbf{A}t}$, gdje je $\mathbf{A}$ matrica tog sustava.

(d) (2 boda) Rabeći (c) riješite navedeni sustav diferencijalnih jednačaba uz početni uvjet $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.