4. poglavlje (korigirano)

∗ LIMESI FUNKCIJA ∗

U ovom poglavlju:

- Neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$
- Neodređeni oblik $\infty - \infty$
- Neodređeni oblik 1^{∞}
- Kose asimptote

Neka je "a" konačan realan broj ili $\pm\infty$. Ako postoji realan broj L, kojem se funkcija $y = f(x)$ "približava" kad je varijabla x blizu "a", tada taj broj zovemo *limes* funkcije $f(x)$ u točki $x = a$, odnosno

$$\boxed{L = \lim_{x \to a} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad L \approx f(x) \text{ ako je } x \approx a.}$$

Ovakva proizvoljna definicija je opisna, ali nije potpuno točna. Na primjer, trigonometrijska funkcija $f(x) = \sin x$ zadovoljava:

$$\sin x \approx \pm 1 \text{ ako je } x \approx \infty \;.$$

Međutim, brojevi 1 i -1 nisu limesi funkcije $f(x) = \sin x$ u $x = \infty$, nego *dva različita gomilišta*. Prema ovome, da bismo učinili *razliku između limesa i gomilišta*, potrebno je iskazati preciznu definiciju limesa i gomilišta dane funkcije $y = f(x)$ u $x = a$ koristeći pojmove $\varepsilon -$ okoline ("epsilon" –okoline).

Realan broj L je *gomilište* funkcije $y = f(x)$ u $x = \infty$ ako vrijedi:

za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da za *beskonačno mnogo* $x > M$ vrijedi $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Realan broj L je *limes* funkcije $y = f(x)$ u $x = \infty$ ako vrijedi:

za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da *za svaki* $x > M$ vrijedi $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Kako vidimo, za preciznu definiciju limesa i gomilišta koristimo pojam ε-okoline broja L, a to je interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Nije teško pokazati da iz ove dvije definicije slijedi da je limes *jedinstveno gomilište*. Na primjer, ako funkcija ima dva različita gomilišta u $x = \infty$, tada funkcija nema limes u $x = \infty$.

Analogno se definira limes funkcije u bilo kojoj konačnoj točki " a " (vidi poglavlje ?.).

U računanju limesa dane funkcije $y = f(x)$ u $x = \infty$, ne koristimo se definicijom, nego svojstvima limesa u odnosu na algebarske operacije među funkcijama, te prelazom sa beskonačno velikih na konačne i proizvoljno male (dijeljenje s najvećom potencijom). U tom smislu treba znati da je

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} q^x = 0, \text{ za } |q| < 1 .}$$

Svojstva limesa u odnosu na algebarske operacije među funkcijama su:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),\\
&\lim_{x\to a}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x),\\
&\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) \cdot (\lim_{x\to a} g(x)),\\
&\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},\\
&\lim_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = (\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)},
\end{aligned}$$

pod uvjetom da svi limesi koji se pojavljuju na desnim stranama u prethodnim jednakostima postoje, odnosno konačni su brojevi.

➢ 4.1 NEODREĐENI OBLIK $\frac{\infty}{\infty}$

U ovoj točki ćemo računati limese racionalnih funkcija koristeći prethodno opisana svojstva limesa funkcija.

➢ RIJEŠENI PRIMJERI

U slijedećim zadacima izračunati limese racionalnih funkcija.

224. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)/x}{(3x-2)/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{2}{3}.$

225. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-3x+1)/x^2}{(2x^2+x)/x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}.$

226. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^2+7x}{x^4-x^3+5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^4-5x^2+7x)/x^4}{(x^4-x^3+5)/x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^4}}=3.$

227. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x+3}{3x^3+2x-4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x^2-x+3)/x^3}{(3x^3+2x-4)/x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}=\dfrac{0}{3}=0.$

228. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-2x^3+x^2}{2x^3+x^2-3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6x^4-2x^3+x^2)/x^4}{(2x^3+x^2-3)/x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}=\dfrac{6}{0}=\infty.$

229. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-2x})/x}{(x+1)/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}=1.$

230. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-x}}{2x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sqrt{x^2-x})/x}{(2x+3)/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1+1}{2}=1.$

231. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x^2-3x+1}}{2\sqrt{x-4}+\sqrt[4]{x^2-5}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x^2-3x+1}]/\sqrt{x}}{[2\sqrt{x-4}+\sqrt[4]{x^2-5}]/\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt[4]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt[4]{1-\dfrac{5}{x^2}}}=\dfrac{1+1}{2+1}=\dfrac{2}{3}.$

232. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+(3x-4)}{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+(3x-4)]/x}{[\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}]/x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^5}}+3-\dfrac{4}{x}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^3}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1+3}{1+1}=\dfrac{4}{2}=2.$

233. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}=\frac{\infty}{-\infty}=|\,x\to(-x)\,|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{(-x)^2-2(-x)}}{-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{-x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+2x})/x}{(-x+1)/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-1+\frac{1}{x}}=-1.$

234. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+3x}}{2x+1}=\frac{-\infty}{-\infty}=|\,x\to(-x)\,|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-x)-\sqrt{(-x)^2+3(-x)}}{2(-x)+1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x-\sqrt{x^2-3x}}{-2x+1}\;=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[-x-\sqrt{x^2-3x}]/x}{[-2x+1]/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-2+\frac{1}{x}}=\dfrac{-1-1}{-2}=1.$

- ZADACI ZA VJEŽBU

235. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+1}{x^3+2x^2-4}.$

236. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+10}{x^3+x^2-1}.$

237. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1+\sqrt{x^2-x}}{3x+\sqrt{x^2+7}}.$

238. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1+\sqrt{x^2-x}}{3x+\sqrt{x^2+7}}.$

239. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x}+4x-1}{2\sqrt{x^2+3x}+x}.$

240. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x}+4x-1}{2\sqrt{x^2+3x}+x}.$

241. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot\sqrt{x^2-5x+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2-7}}{3x+4+\sqrt{x^2-2x+5}}.$

242. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot\sqrt{x^2-5x+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2-7}}{3x+4+\sqrt{x^2-2x+5}}.$

➢ RJEŠENJA

$R235.$ 2. $R236.$ 0. $R237.$ $\dfrac{3}{4}$. $R238.$ $\dfrac{1}{2}$. $R239.$ $\dfrac{5}{3}$. $R240.$ -5.
$R241.$ $\dfrac{5}{4}$. $R242.$ $-\dfrac{3}{2}$.

➢ 4.2 NEODREĐENI OBLIK $\infty-\infty$

U ovoj točki ćemo računati limese funkcija kod kojih se nakon uvrštavanja $x=\infty$ pojavljuje neodređeni oblik $\infty-\infty$. U tom slučaju je potrebno danu funkciju transformirati raznim "trikovima" (racionaliziranje, faktoriziranje, itd.) na oblik $\frac{\infty}{\infty}$, te nastaviti u smislu prelaza sa beskonačno velikih na konačne i proizvoljno male veličine (dijeljenje brojnika i nazivnika sa najvećom potencijom), što je objašnjeno u prethodnom poglavlju.

➢ RJEŠENI PRIMJERI

U slijedećim zadacima izračunati limese funkcija.

243. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x+3}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=0.$$

244. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+4})=\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+4})\dfrac{x+\sqrt{x^2-3x+4}}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+3x-4}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-4)/x}{[x+\sqrt{x^2-3x+4}]/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\frac{3}{2}.$$

245. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-2x+5}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-2x+5})\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-2x+5}}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-2x+5}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2+2x-5}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-2x+5}} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-9)/x}{[\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-2x+5}]/x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{9}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

246. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+4})} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+4})}\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}(x-3-x-4)} = -\frac{1}{7}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}} = \tfrac{\infty}{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{7}\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}]/\sqrt{x}}{\sqrt{x}/\sqrt{x}} = -\frac{1}{7}\lim_{x\to\infty}[\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}] = -\frac{2}{7}.$$

247. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-x+2}) = \ | x\to(-x) | \ = \lim\limits_{-x\to-\infty}[(-x)+\sqrt{(-x)^2-(-x)+2}] =$

$$= \lim_{x\to\infty}[-x+\sqrt{x^2+x+2}] = \lim_{x\to\infty}[-x+\sqrt{x^2+x+2}]\frac{x+\sqrt{x^2+x+2}}{x+\sqrt{x^2+x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x^2+x+2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)/x}{[x+\sqrt{x^2+x+2}]/x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

➢ ZADACI ZA VJEŽBU

248. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-3x+1})$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-x)$.

250. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+5x})$.

251. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+2x^2-1}).$

252. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[4]{x^4+x^3-2}-\sqrt[4]{x^4-x^2+3x}).$

➢ RJEŠENJA

$R248.\ \frac{3}{2}.\quad R249.\ -\frac{3}{2}.\quad R250.\ -2.\quad R251.\ -\frac{2}{3}.\quad R252.\ \frac{1}{4}.$

➢ 4.3 NEODREĐENI OBLIK 1^∞

U ovoj točki računamo limese funkcija oblika $y=f(x)^{g(x)}$ kod kojih nakon uvrštavanja $x=\infty$ dobivamo oblik 1^∞. Osim svojstava limesa, nabrojanih na početku ovog poglavlja, koristit ćemo važan identitet:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.}$$

Nadalje, treba primijeniti određene «trikove» pomoću kojih se dani oblik $y=f(x)^{g(x)}$ transformira na eksponencijalni oblik $e^{\frac{\infty}{\infty}}$, pa potom u eksponentu primijeniti rješavanje oblika $\frac{\infty}{\infty}$ s početka ovog poglavlja.

➢ RJEŠENI PRIMJERI

U slijedećim zadacima izračunati limese funkcija.

253. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^x=1^\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}3}=e^3.$

254. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x=1^\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}a}=$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a=e^a.$$

255. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+4}\right)^x = 1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{e^4} = e^{-4}.$

256. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+a}\right)^x = 1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{e^a} = e^{-a}.$

257. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2}\right)^{x^2} = 1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x^2}{5}}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x^2}{5}}\right)^{\frac{x^2}{5}5} = e^5.$

258. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^x = 1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-3}{x+1}-1\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-4}{x+1}\right)^x =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x+1}{-4}}\right)^{\frac{x+1}{-4}\left(\frac{-4x}{x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}} = e^{-4}.$

259. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^x = 1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-a}{x-b}-1\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b-a}{x-b}\right)^x =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-b}{b-a}}\right)^{\frac{x-b}{b-a}\left(\frac{(b-a)x}{x-b}\right)} = e^{(b-a)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-b}} = e^{b-a}.$

- ZADACI ZA VJEŽBU

260. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\right)^{2\sqrt{x}}.$

261. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x}{x^3+4}\right)^{3x^2}.$

262. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+3x-1}\right)^{x}.$

263. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}-1}\right)^{\sqrt{x}}.$

264. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x+1}}\right)^{x/2}$.

➢ RJEŠENJA

$R260.\ e^6.\quad R261.\ e^3.\quad R262.\ e^{-4}.\quad R263.\ e^{-3}.\quad R264.\ e^{-1}.$

➢ 4.4 KOSE ASIMPTOTE

Desna kosa asimptota funkcije $y=f(x)$ je pravac $y=k_1x+l_1$ kojem se funkcija f približava kada je x blizu $+\infty$.

Lijeva kosa asimptota funkcije $y=f(x)$ je pravac $y=k_2x+l_2$ kojem se funkcija f približava kada je x blizu $-\infty$.

Prema tome, kose asimptote (ako postoje) opisuju ponašanje funkcije za neizmjerno pozitivne i negativne *x*, odnosno precizira desni i lijevi dio grafa funkcije.

Efektivno pronalaženje kosih asimptota se svodi na precizno računanje nekoliko limesa. Što više, za koeficijente kosih asimptota vrijede formule:

– desna kosa asimptota $y=k_1x+l_1$ funkcije $y=f(x)$:

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad l_1=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k_1x);$$

– lijeva kosa asimptota $y=k_2x+l_2$ funkcije $y=f(x)$:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad l_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x).$$

Ako iz ovakvog računa barem jedan od brojeva k_1 i l_1 ne postoji, tada funkcija $y=f(x)$ *nema desnu* kosu asimptotu. Ako pak barem jedan od brojeva k_2 i l_2 ne postoji, tada funkcija $y=f(x)$ *nema lijevu* kosu asimptotu.

Ako je u jednoj od kosih asimptota prvi koeficijent jednak nuli tada je ona specijalno *horizontalna* asimptota.

Nužnost prethodnih formula za koeficijente k_1, l_1, k_2 i l_2 nije teško opravdati direktno iz definicije limesa i kosih asimptota. Naime, iz definicije desne kose asimptote imamo da je:

$$y = k_1 x + l_1 \approx f(x) \text{ ako je } x \approx +\infty.$$

Ako podijelimo sa x ovu aproksimativnu jednakost, dobivamo izraz za k_1, a potom prebacivanjem na drugu stranu, dobivamo izraz za l_1, odnosno:

$$(k_1 x + l_1 \approx f(x))/x \quad \Rightarrow \quad k_1 + l_1/x \approx f(x)/x \quad \Rightarrow \quad k_1 \approx \frac{f(x)}{x} \quad \text{ako je } x \approx +\infty,$$

$$k_1 x + l_1 \approx f(x) \;\Rightarrow\; l_1 \approx f(x) - k_1 x \quad \text{ako je } x \approx +\infty.$$

➢ RIJEŠENI PRIMJERI

U sljedećim zadacima izračunati kose asimptote danih funkcija.

265. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$;

- $D(f) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$;
- $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}/x}{x/x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1} = 1$;
- $l_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x} - x)\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$

  $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3}{2}$;

Desna asimptota je: $y = k_1 x + l_1 = x + \frac{3}{2}$;

- $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = |x \to -x| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}/x}{-x/x} = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{1} = -1$;
- $l_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - k_2 x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x} + x) = |x \to -x| = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x} - x) =$

  $= \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x} - x)\frac{\sqrt{x^2-3x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x} = -\frac{3}{2}$;

Lijeva asimptota je: $y = k_2 x + l_2 = -x - \frac{3}{2}$;

266. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}$;

- $D(f) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$;
- $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1} = 2$;
- $l_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x + \sqrt{x^2 - 2x} - 2x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 - 2x} - x)\frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -\frac{2}{2} = -1$;

Desna asimptota je: $y = k_1 x + l_1 = 2x - 1$;

- $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = | x \to -x | =$

$= 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{-x} = 1 - 1 = 0$;

- $l_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - k_2 x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x + \sqrt{x^2 - 2x}) = | x \to -x | = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 2x} - x) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 2x} - x)\frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{2} = 1$;

Lijeva asimptota je: $y = k_2 x + l_2 = 1$;

267. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 9}}\right)$;

- $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$;
- iz razloga $\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_1 = 0$;
- $l_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 9}}\right) = \operatorname{arctg} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

Desna asimptota je: $y = \frac{\pi}{4}$;

- iz razloga $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_2 = 0$;
- $l_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - k_2 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 9}}\right) = \operatorname{arctg} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \operatorname{arctg} -1 = -\frac{\pi}{4}$;

Lijeva asimptota je: $y = -\frac{\pi}{4}$;

268. $f(x) = 3x - \sqrt{4-x}$;

- $D(f) = (-\infty, 4]$;
- nema desnog dijela domene pa nema ni desnu asimptotu ;
- $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x - \sqrt{4-x}}{x} = |\, x \to -x \,| = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x - \sqrt{4+x}}{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3}{-1} = 3$;
- $l_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3x - \sqrt{4-x} - 3x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{4-x}) = -\infty$;

Kako ne postoji l_2, to nema ni lijeve asimptote.

➢ ZADACI ZA VJEŽBU

U slijedećim zadacima naći kose asimptote danih funkcija.

269. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

270. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$.

271. $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 4x}$.

272. $f(x) = 2 \cdot \operatorname{th} \dfrac{x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$.

273. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}$.

➢ RJEŠENJA

$R269$. $D(f) = [-2, 2]$, nema kosih asimptota.

$R270$. $D(f) = (-\infty, -6] \cup [1, \infty)$,

- desna $y = x + \dfrac{5}{2}$,
- lijeva $y = -x - \dfrac{5}{2}$.

$R271$. $D(f) = (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$,

- desna $y = 4x + 2$,
- lijeva $y = 2x - 2$.

$R272.$ $D(f) = (-\infty, +\infty)$,

- desna $y = 2$,
- lijeva $y = -2$.

$R273.$ $D(f) = (-\infty, +\infty)$,

- desna $y = x - \dfrac{2}{3}$,
- lijeva $y = x - \dfrac{2}{3}$.